KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.

Tisdagen den 14 november 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11 ger 4 poäng , 12-13 ger 5 poäng vardera och 14-15 ger 3 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 14 poäng på del 2.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2006. OBS!

Del 1

Modul 1.

Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.

Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T-40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T-30}{3}$.

Bestäm först lösningen till respektive modell och avgör därefter vilken modell som kan vara lämplig.

Modul 2.

Bestäm den lösning till ekvationen

$$y' + 4y + \int_0^t 13y(\tau)\,d\tau = 0$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 3$.

Modul 3.

Bestäm konstanterna, $b_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,$

så att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \begin{cases} x, & \text{då } 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x, & \text{då } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$.

Modul 4.

Betrakta ett linjärt system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ av två differentialekvationer. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella element.
Vidare är det känt att ett egenvärde är $-1+2i$ och en tillhörande egenvektor är $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet.
Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(4,1)$.

Modul 5. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_{D_{xy}} \frac{y e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

där $D_{xy} = \left\{(x,y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4, -y \le x \le y\right\}$.

Modul 6.

Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma (e^{x+y} + y^3 \sin x)\,dx + (e^{x+y} - 3y^2 \cos x)\,dy$$

där Γ är vägen $ABCD$ sammansatt av de räta linjestyckena AB, BC och CD där $A=(0,0)$, $B=(4,2)$, $C=(0,6)$ och $D=(-2,0)$ med orienteringen given av punkternas uppräkning.

Del 2

11.

I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c. Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.

12.

a. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(L) = 0$.

b. Visa att de i a) erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0, L]$.

c. Bestäm de lösningar till den partiella differentialekvationen $u'_t = u''_x$ som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'_x(L,t) = 0$.

13. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av linjära differentialekvationer $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Systemet har följande lösningar: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 14e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 4e^t + 3e^{3t} \\ 2e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt matrisen $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en tillhörande egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{X}_1$, till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{X}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

14. Ur en kropp definierad av olikheterna $x^2 + y^2 \le z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ och $z \ge 0$ stansas ut med cylindern $4x^2 + 4y^2 \le 1$. Beräkna den återstående volymen.

15. Bestäm den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} (t-u)^2 \; e^{-3t} \cos 2u \; du \right\} dt$.