KTH Matematik

**Kompletteringstentamen i Matematik IV, 5B1210.**
Måndagen den 4 december 2006, kl 1300-1600.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För godkänt krävs att 5 moduler är godkända..
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2006. OBS!
Denna tentamen är endast avsedd för de som efter den ordinarie tentamen uppnått tre eller fyra godkända moduler.

Del 1

Modul 1.

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y \quad \frac{2}{4 \quad x} y = \frac{2x}{(4 \quad x)^2}, \quad y(0) = 2.$$

Bestäm därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.
Vi bestämmer en integrerande faktor och multiplicerar differentialekvationen med denna.

En integrerande faktor ges av $e^{\frac{2}{4 \quad x}dx} = e^{2\ln|4 \quad x|} = (4 \quad x)^2$.

Differentialekvationen blir $(4 \quad x)^2 y \quad 2(4 \quad x)y = 2x$.

Nu kan vänstra ledet skrivas som en derivata: $((4 \quad x)^2 y) = 2x$.

Integrera med avseende på $x$: $(4 \quad x)^2 y = x^2 + C$.

Bestäm konstanten med hjälp av villkoret: $(4)^2 \quad 2 = C$, $C = 32$.

Den sökta lösningen är $y = \dfrac{x^2+32}{(4 \quad x)^2}$ . Här ser vi att $x \quad 4$. Detta tillsammans med villkoret ger att lösningens existensintervall ges av $\{x : x < 4\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \dfrac{x^2+32}{(4 \quad x)^2}$ . Lösningens existensintervall är $\{x : x < 4\}$.

Modul 2.

Laplacetransformera funktionen
$$f(t) = \begin{matrix} 0 & , \; t < 0 \\ t & , \; 0 \quad t < 2 \\ 3 & , \; 2 \quad t < 4 \\ 6 \quad t & , \; 4 \quad t < 6 \\ 0 & , \; 6 \quad t \end{matrix} .$$

Lösning:

Här har två olika vägar till buds. Antingen direkt insättning i Laplacetransformationens definition eller med hjälp av Heavisides funktion, $U(t \quad a)$ med lämpliga värden på konstanten $a$.
Vi väljer den senare vägen.

$$f(t) = tU(t) \quad tU(t \quad 2) + 3U(t \quad 2) \quad 3U(t \quad 4) + (6 \quad t)U(t \quad 4) \quad (6 \quad t)U(t \quad 6).$$

Vi omformar för att passa in på formeln $L\{g(t \quad a)U(t \quad a)\} = e^{\quad sa}L\{g(t)\}$.

$$f(t) = tU(t) \quad (t \quad 3)U(t \quad 2) \quad (3 \quad 6 + t)U(t \quad 4) + (t \quad 6)U(t \quad 6)$$

$$f(t) = tU(t) \quad \{(t \quad 2) \quad 1\}U(t \quad 2) \quad \{(t \quad 4) + 1\}U(t \quad 4) + (t \quad 6)U(t \quad 6)$$

Laplacetransformera: $L\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad e^{\quad 2s}\left(\dfrac{1}{s^2} \quad \dfrac{1}{s}\right) \quad e^{\quad 4s}\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right) + e^{\quad 6s}\dfrac{1}{s^2}$.

SVAR: Den sökta Laplacetransformen är $F(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad e^{\quad 2s}\left(\dfrac{1}{s^2} \quad \dfrac{1}{s}\right) \quad e^{\quad 4s}\left(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right) + e^{\quad 6s}\dfrac{1}{s^2}$.

KTH Matematik

Modul 3.

Någon eller några av följande partiella differentialekvationer

$u_x = u + x + y$ , $u_x = u_y + u$ , $uu_x = u_y + u + x$ , där $u = u(x, y)$,

går att lösa med hjälp av variabelseparation.

Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $u(x,0) = 5e^{\ x} + 6e^{3x}$.

Lösning:

Det är endast differentialekvationen $u_x = u_y + u$ som kan lösas med hjälp av variabelseparation.

Vi ansätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X\ (x)Y(y) = X(x)Y\ (y) + X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X\ (x)}{X(x)} = \frac{Y\ (y)}{Y(y)} + 1 = \text{konstant} = \quad .$$

Den partiella differentialekvationen har övergått i ett system av ordinära differentialekvationer:

$$X\ (x) \quad X(x) = 0$$

$$Y\ (y) \quad ( \quad 1)Y(y) = 0 \ .$$

Vi får följande lösningar:

$$X(x) = Ae^{\ x}$$

$$Y(y) = Be^{( \quad 1)y} \ .$$

För varje konstant erhålles en lösning på formen $u\ (x,y) = c\ e^{\ x+( \quad 1)y}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösning.

Vi får

$$u(x,y) = \quad c\ e^{\ x+( \ \forall 1)y}$$

.

Det givna villkoret ger:

$$u(x,0) = 5e^{\ x} + 6e^{3x} = \quad c_{\forall} e^{\forall} \quad .$$

Detta innebär att

$$\begin{array}{lll} _1 = \ 1 & c_{\ _1} = 5 & \\ _2 = 3 & c_{\ _2} = 6 & \text{övriga } c \ = 0 \end{array} \ .$$

Insättning ger: $u(x,y) = 5e^{\ x \ 2y} + 6e^{3x+2y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 5e^{\ x \ 2y} + 6e^{3x+2y}$.

Modul 4.

Bestäm de stationära lösningarna samt bestäm om möjligt lösningarnas karaktär, typ och stabilitet/instabilitet, till följande icke-linjära system av differentialekvationer

$$x \ = x(y \quad 2)$$

$$y \ = y(x \quad 3) \ .$$

Lösning:

De stationära lösningarna erhålles då hastighetsvektorn är lika med noll.

Vi får:

$$0 = x(y \quad 2)$$

$$0 = y(x \quad 3)$$ vilket har lösningarna (0,0) och (3,2).

För att avgöra lösningarnas karaktär linjariserar vi det icke-linjära systemet.

Vi behöver då Jacobimatrisen i de aktuella punkterna, (0,0) och (3,2).

Vi bestämmer Jacobimatrisen

$$J(x,y) = \begin{matrix} y \quad 2 & x \\ y & x \quad 3 \end{matrix} \ .$$

<u>(0,0)</u>

$$J(0,0) = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

har negativa egenvärden, -2 och -3, och vi har en stabil nod.

<u>(3,2)</u>

$$J(3,2) = \begin{matrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

har egenvärdena $\quad = \pm\sqrt{6}$ och vi har en sadelpunkt och därmed instabil.
Motsvarande gäller även för det icke-linjära systemet.

<u>SVAR:</u> (0,0) är en stabil nod och (3,2) är en sadelpunkt och därmed instabil.

<u>Modul 5.</u>

Tröghetsmomentet med avseende på z-axeln för området $D_{xy}$ ges av dubbelintegralen $\underset{D_{xy}}{} (x^2 + y^2)dxdy$ ,

där $D_{xy}$ begränsas av kurvorna $xy = 2$, $xy = 4$, $x^2 \quad y^2 = 3$ och $x^2 \quad y^2 = 5$ i första kvadranten.
Bestäm tröghetsmomentet.
<u>Lösning:</u>

Vi inför nya variabler $u$ och $v$ genom $\begin{matrix} u = xy \\ v = x^2 \quad y^2 \end{matrix}$ .

Integrationselementet $dxdy$ ersättes med $dxdy = \left|\det \dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \dfrac{dudv}{\left|\det \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|}$ .

Vi beräknar funktionalmatrisen $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{matrix} y & x \\ 2x & 2y \end{matrix}$ . Determinanten är $\det \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \quad 2(x^2 + y^2)$.

Vi får $(x^2 + y^2)dxdy = (x^2 + y^2)\dfrac{dudv}{| \quad 2(x^2 + y^2)|} = \dfrac{dudv}{2}$ .

Insättning i dubbelintegralen ger $\underset{D_{xy}}{} (x^2 + y^2)dxdy = \underset{D_{uv}}{} \dfrac{1}{2} dudv = \dfrac{1}{2}$ Arean av $D_{uv}$ .

Integrationsområdet i uv-planet är $D_{uv} = \{(u,v):\ 2 \quad u \quad 4,\ 3 \quad v \quad 5\}$.

Dubbelintegralen blir $\underset{D_{xy}}{} (x^2 + y^2)dxdy = 2$ .

<u>SVAR:</u> Tröghetsmomentet $\underset{D_{xy}}{} (x^2 + y^2)dxdy = 2$.

<u>Modul 6</u>. Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (y, \quad x, \quad 1)$ genom den del av ytan $z = 2 \quad x^2 \quad y^2$ som ligger ovanför $xy$-planet. Normalens $z$-komponent är negativ.
<u>Lösning:</u>

Flödet av vektorfältet $\mathbf{u}$ genom ytan $S$ i normalen $\hat{\mathbf{n}}$:s riktning ges av $\underset{S}{} \mathbf{u} \quad \hat{\mathbf{n}} d$ .

En normal till ytan ges av $grad(x^2 + y^2 + z \quad 2) = ( \quad 2x, \quad 2y, \ 1)$.

Vår normal blir $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{( \quad 2x, \quad 2y, \quad 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$. $\mathbf{u} \quad \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} = (y, \quad x, \quad 1) \quad \dfrac{( \quad 2x, \quad 2y, \quad 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$.

Projicera ytan på xy-planet: $d \quad = \dfrac{dxdy}{|\cos \quad |} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$.

Insättning i flödesintegralen ger $\underset{S}{} \mathbf{u} \quad \hat{\mathbf{n}} d \quad = \underset{D_{xy}}{} dxdy =$ Arean av $D_{xy}$.

Området i xy-planet ges av en cirkelskiva med radien $\sqrt{2}$. $\underset{S}{\mathbf{u}\ \hat{\mathbf{n}}d} \ = \ (\sqrt{2})^2 = 2$ .

---

En annan lösningsväg är att sluta ytan $S$ med cirkelskivan $S_1 = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2 + y^2 \ \ \sqrt{2}\}$.

Här användes normalen $\hat{\mathbf{n}}_1 = (0,0,1)$, vilket är den inåtriktade normalen.

Därefter kan divergenssatsen användas. Divergensen för vektorfältet är lika med noll.

Vi får $\underset{S}{\mathbf{u}\ \hat{\mathbf{n}}d} + \underset{S_1}{\mathbf{u}\ \hat{\mathbf{n}}_1 d} = \underset{K}{div\,\mathbf{u}dxdydz}$ .

Insättning ger $\underset{S}{\mathbf{u}\ \hat{\mathbf{n}}d} = \underset{S_1}{(y,\ \ x,\ \ 1)\ (0,0,1)d} = \underset{S_1}{d} = \text{Arean av } S_1$ .

Cirkelskivans area är lika med $(\sqrt{2})^2 = 2$ .

---

SVAR: Flödet genom ytan är $\underset{S}{\mathbf{u}\ \hat{\mathbf{n}}d} = 2$ .