KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210 för Bio2 och K2.

Onsdagen den 10 januari 2007, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 15-22p; 4: 23-29p; 5: 30-35p.

Uppgifterna: 1,3,7 ger 3 poäng vardera, 2,5-6,8-10 ger 4 poäng vardera och 4 ger 2 poäng.

1. Beräkna volymen av den kropp som ges av $\{(x,y,z):\ z \le 5 - x^2 - y^2,\ z \ge 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

<u>Lösning:</u>

Volymen ges av trippelintegralen

$$V = \iiint_K dxdydz$$

Börja med integration i z-led

$$V = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=1}^{5-x^2-y^2} dz \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left\{ 5 - x^2 - y^2 - 1 \right\} dxdy$$

Inför polära koordinater

$$V = \left\{ \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad dxdy = rdrdt \quad \begin{cases} r: 0 \to 2 \\ t: 0 \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \right\} = \iint_{D_{rt}} \left\{ 4 - r^2 \right\} rdrdt$$

Volymen blir

$$V = \frac{\pi}{2}(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}) = 2\pi$$

SVAR: Den sökta volymen är $V = 2\pi$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \big(3y\cos(3x+2y)\big)dx + \big(\sin(3x+2y) + 2y\cos(3x+2y) + x\big)dy$,

där Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ tagen i positiv led.

<u>Lösning:</u>

Vi använder Greens formel: $\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\sin(3x+2y) + 2y\cos(3x+2y) + x) = 3\cos(3x+2y) - 2y \cdot 3\sin(3x+2y) + 1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(3y\cos(3x+2y)) = 3\cos(3x+2y) - 3y \cdot 2\sin(3x+2y) \end{cases}$$

Linjeintegralen övergår i en dubbelintegral medelst Greens formel.

$$\int_\Gamma \big(3y\cos(3x+2y)\big)dx + \big(\sin(3x+2y) + 2y\cos(3x+2y) + x\big)dy = \iint_D 1dxdy = \text{Arean av } D \ .$$

Cirkelns area är πR^2.

SVAR: Linjeintegralen $\int_\Gamma \big(3y\cos(3x+2y)\big)dx + \big(\sin(3x+2y) + 2y\cos(3x+2y) + x\big)dy = \pi R^2$.

3. Beräkna $\iint_S grad(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$ då S är enhetssfären och $\hat{\mathbf{n}}$ är dess utåtriktade enhetsnormal.

Vidare är $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

<u>Lösning:</u>

Vi börjar med att beräkna gradienten.

$grad\,(r^3) = 3r^2(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}) = 3r\mathbf{r}$.

Den utåtriktade enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}$.

Integranden blir $grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 3r\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 3r^3$.

På enhetssfären S är $r = 1$, vilket ger $grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 3$.

$$\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iint_S 3 d\sigma = 3 \cdot \text{Sfärens area} = 3 \cdot 4\pi 1^2 = 12\pi.$$

Ett annat alternativ är att använda divergenssatsen.

Det givna fältet saknar singulära punkter. Normalen är utåtriktad och ytan är sluten.

Divergenssatsen ger: $\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K div grad\,(r^3) dxdydz$.

Vi beräknar divergensen av gradienten.

$$div grad(r^3) = div 3r\mathbf{r} = 3\left(\frac{\partial}{\partial x} rx + \frac{\partial}{\partial y} ry + \frac{\partial}{\partial z} rz\right) = 3\left(\frac{x}{r} x + r + \frac{y}{r} y + r + \frac{z}{r} z + r\right)$$

Hyfsning ger: $div grad\,(r^3) = 12r$.

Insättning trippelintegralen ger: $\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K 12 r dxdydz$.

Här passar sfäriskt polära koordinater.

$$\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_{K_{r\theta\varphi}} 12 r r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \ .$$

Integrationsområdet $K_{r\theta\varphi} = \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

Integration ger: $\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 3 \cdot 1^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 12\pi$.

SVAR: $\iint_S grad\,(r^3) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 12\pi$.

4. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till differentialekvationen $y' = y(y-2)$.

<u>Lösning:</u>

De kritiska punkterna erhålles då derivatan är lika med noll.

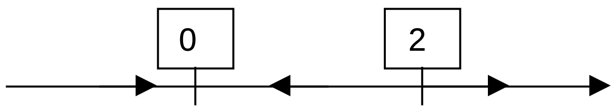
Vi får de stationära lösningarna $y_1 = 0$ och $y_2 = 2$.

En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.

Nu över till studie av derivatans tecken.

För $y < 0$ och $y > 2$ är derivatan positiv och $y(t)$ är växande.

För $0 < y < 2$ är derivatan negativ och $y(t)$ är avtagande.



Den stationära lösningen $y_1 = 0$ är stabil och den stationära lösningen $y_2 = 2$ är instabil.

SVAR: $y_1 = 0$ är stabil och $y_2 = 2$ är instabil.

5. En saltlösning med koncentrationen k g/l pumpas in i en tank med hastigheten 2 l/s.

Tanken innehåller 400 l lösning och saltmängden i tanken är 4 g.

Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 2 l/s.

Bestäm först saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t.

Vid tiden $t = 200\ln 2$ önskas saltmängden 8 g i tanken.

Bestäm koncentrationen k för att detta önskemål skall bli uppfyllt.

Ange även saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t för denna koncentration.

Lösning:

Förändringen av saltmängden per tidsenhet ges av $\frac{dx}{dt} = 2\ \ k - 2\ \ \frac{x}{400}$.

Hyfsning ger: $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{200} = 2\ \ k$. Vi har en linjär differentialekvation, dess allmänna lösning erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.

Vi får: $x(t) = Ce^{-\frac{t}{200}} + 400k$. Vid starten är saltmängden lika med 4 .

Insättning ger konstanten C.

$x(0) = C + 400k = 4$, $C = 4 - 400k$.

Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $x(t) = (4 - 400k)e^{-\frac{t}{200}} + 400k$.

Nu över till bestämning av koncentrationen hos den inpumpade lösningen.

Insättning av villkoret ger: $8 = x(200\ln 2) = (4 - 400k)e^{-\frac{200\ln 2}{200}} + 400k$.

Vi får: $8 = (2 - 200k) + 400k$, $k = \frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$.

Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t blir $x(t) = 12 - 8e^{-\frac{t}{200}}$.

SVAR: Saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t är $x(t) = (4 - 400k)e^{-\frac{t}{200}} + 400k$.

Den sökta koncentrationen är $k = 3\%$ och tillhörande saltmängd är $x(t) = 12 - 8e^{-\frac{t}{200}}$.

6. Bestäm $y(5)$ då $y(t)$ är den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ och $\delta(t-4)$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-4s}$.

Insättning av villkoren och hyfsning ger: $Y(s) = \frac{3s + 14 + e^{-4s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 14 + e^{-4s}}{(s+1)(s+2)}$.

Uppdelning ger: $Y(s) = \frac{11}{s+1} - \frac{8}{s+2} + \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)e^{-4s}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 11e^{-t} - 8e^{-2t} + U(t-4)(e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)})$.

Det sökta funktionsvärdet är $y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}$.

SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}$.

7. En lösning till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$ ges av $y_1 = x$.

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$.

Lösning:

Vi använder oss av metoden "reduktion av ordning".

Insättning av $y = xz$ i den inhomogena differentialekvationen ger:

$$x^2(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = -x .$$

Hyfsning ger: $x^3z'' = -x$ eller $z'' = -x^{-2}$.

Integrera med avseende på x: $z' = x^{-1} + A$.

Upprepad integration ger: $z = \ln|x| + Ax + B$.

Den allmänna lösningen är $y = x(\ln|x| + Ax + B) = Ax^2 + Bx + x\ln x$.

Observera att allmänna homogena lösningen är $y_h = Ax^2 + Bx$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y = Ax^2 + Bx + x\ln x$, $x > 0$

8. Bestäm allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + 2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Lösning:

Den allmänna lösningen erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Vi startar med att bestämma den allmänna homogena lösningen och bestämmer härvid egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Eftersom matrisen är triangulär kan egenvärdena direkt anges.

Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$. Motsvarande egenvektorer erhålles ur systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = -1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = r_1\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, där r_1 är ett godtyckligt reellt tal.

$\lambda_2 = -3$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = r_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, där r_2 är ett godtyckligt reellt tal.

Den allmänna homogena lösningen är $\mathbf{X}_h = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ 5e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{C}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter och Φ är en fundamentalmatris.

En partikulärlösning är $\mathbf{X_p} = \Phi\int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$.

Inversen till fundamentalmatrisen är $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{2e^{-4t}}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ -5e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ -5e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$.

$$\Phi^{-1}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ -5e^{3t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5e^{2t} + 2 \end{pmatrix}$$

Integration och insättning ger: $\mathbf{X_p} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ 5e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t - \frac{5}{2}e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{-t} \\ 5te^{-t} + 2te^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Vilket kan skrivas: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 0 \\ 5e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

9. Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(y-5) \\ y(x-2) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

Lösning:

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi erhåller följande system $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(y-5) \\ y(x-2) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x,y)$.

Detta har lösningarna $(0,0)$ och $(2,5)$.

För att klassificera dessa punkter använder vi oss av Jacobimatrisen i den aktuella punkten.

Jacobimatrisen är lika med $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y-5 & x \\ y & x-2 \end{pmatrix}$.

Vi sätter in de två kritiska punkterna och erhåller därvid följande matriser.

$\underline{(0,0)}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och negativa.

Den kritiska punkten är en stabil nod. Motsvarande gäller även för det icke-linjära systemet.

$\underline{(2,5)}$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Motsvarande gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: $(0,0)$ är stabil nod och $(2,5)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

10. Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi$,

då $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ för $t \geq 0$ och $u(x,0) = \sin 3x$ för $0 \leq x \leq \pi$.

Lösning:

Vi söker funktioner $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som uppfyller de homogena villkoren.

Insättning i differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) + X(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Division med $X(x)T(t)$ ger: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t) - T(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T(t) - (\lambda + 1)T(t) = 0 \end{cases}$$

"t-ekvationen" har lösningar på formen $T(t) = Ce^{(\lambda+1)t}$.

För "x-ekvationen" är lösningens form beroende av konstanten λ.

"X-ekvationen" har tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in \mathbf{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in \mathbf{R}$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Variabelseparationen tillsammans med randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ger oss $X(0) = X(\pi) = 0$.

Insättning av ändpunkterna ger:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in \mathbf{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in \mathbf{R}$
$\begin{cases} 0 = X(0) = A_1 + B_1 \\ 0 = X(\pi) = A_1 e^{\mu\pi} + B_1 e^{-\mu\pi} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = B_2 \\ 0 = X(\pi) = A_2 \pi + B_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X(0) = A_3 \\ 0 = X(\pi) = A_3 \cos \mu\pi + B_3 \sin \mu\pi \end{cases}$
Endast den triviala lösningen.	Endast den triviala lösningen.	$\begin{cases} A_3 = 0 \\ \mu\pi = n\pi \end{cases}$ $X(x) = B_3 \sin nx$.

Funktionerna $u_n(x,t) = B_n \sin nx\ e^{(-n^2+1)t}$ uppfyller differentialekvationen och randvillkoren för godtyckliga heltal $n \geq 1$. Även linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Nu över till begynnelsevillkoret $u(x,0) = \sin 3x$. Detta ger $B_n \sin nx = \sin 3x$, $B_3 = 1$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = e^{-8t} \sin 3x$.