KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210 för Bio2 och K2.
Onsdagen den 10 januari 2007, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 15-22p; 4: 23-29p; 5: 30-35p.
Uppgifterna: 1,3,7 ger 3 poäng vardera, 2,5-6,8-10 ger 4 poäng vardera och 4 ger 2 poäng.

1. Beräkna volymen av den kropp som ges av $\{(x,y,z):\ z \le 5 - x^2 - y^2,\ z \ge 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \big(3y\cos(3x+2y)\big)dx + \big(\sin(3x+2y) + 2y\cos(3x+2y) + x\big)dy$,

där Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ tagen i positiv led.

3. Beräkna $\iint_S grad(r^3)\ \hat{\mathbf{n}}d\sigma$ då S är enhetssfären och $\hat{\mathbf{n}}$ är dess utåtriktade enhetsnormal.

Vidare är $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till differentialekvationen $y' = y(y-2)$.

5. En saltlösning med koncentrationen k g/l pumpas in i en tank med hastigheten 2 l/s.
Tanken innehåller 400 l lösning och saltmängden i tanken är 4 g.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 2 l/s.
Bestäm först saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t.
Vid tiden $t = 200\ln 2$ önskas saltmängden 8 g i tanken.
Bestäm koncentrationen k för att detta önskemål skall bli uppfyllt.
Ange även saltmängden i tanken vid en godtycklig tidpunkt t för denna koncentration.

6. Bestäm $y(5)$ då $y(t)$ är den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ och $\delta(t-4)$ är Diracs deltafunktion.

7. En lösning till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$ ges av $y_1 = x$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$.

8. Bestäm allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + 2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$.

9. Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(y-5) \\ y(x-2) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

10. Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $t \ge 0,\ 0 \le x \le \pi$,

då $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ för $t \ge 0$ och $u(x,0) = \sin 3x$ för $0 \le x \le \pi$.