KTH Matematik

Tentamenskrivning i Matematik IV , 5B1230 Matematik IV, del 3
Lördagen den 4 juni, 2005, kl 14.00 - 19.00

Hälpmedel BETA,Mathematics Handbook
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för Betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt betyg krävs 5 moduler godkända.
GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN VÅREN 2005,
Detta sker enligt följande: Godkänd molul nr i ger uppgift nr i godänd. $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Module 1, LS1 Kapitel 1-3 i Z.C
Module 2, INL1 Kapitel 7 i Z.C
Module 3, LS2 Kapitel 4,8 och 10 Z.C
Module 4, INL2 Kapitel 11-12 i Z.C
Module 5, LS3 Kapitel 9 i E.P
Module 6, LS4 Kapitel 10-11 i E.P

Lycka till!

1. (Module 1)
   I en modell för tillväxt av en population av bakterier, så är tillväxthastigheten av populationen proportionell mot populationens storlek.

   (a) Sätt upp en differentialekvation för antalet $y(t)$ av bakterierier i populationen vid tiden t

   (b) Finn allmän lösning till differentialekvationen.

   (c) Vid ett viss tidpunkt ($t = 0$) hade populationen 100 bakterier. 2 månader senare ($t = 2$) så hade populationen ökat till 250 bakterier. Finn vid vilken tidpunkt som populationen har ökat till 1000 bakterier,

---

Lösning
Svar: Differentialekvationen blir

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

där proportionalitetskonstanten $k > 0$.
Allman lösning till denna differentialekvation är

$$y(t) = C\mathrm{e}^{kt},$$

där C är konstant.
Sätter vi in begynnelsevillkoret $y(0) = 100$ får vi $100 = Ce^0 = C$ och sätter vi sedan in $y(2) = 250$ så får vi $250 = 100e^{2k}$, dvs. $e^{2k} = \frac{5}{2}$ vilket ger $k = \frac{1}{2}\ln(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}(\ln(5) - \ln(2))$.
Vi söker nu tidpunkten t_0 sådan att $y(t_0) = 1000$, dvs. att $100e^{kt_0} = 1000$ vilket innebär att $e^{kt_0} = 10$ och

$$t^0 = \frac{\ln(10)}{k} = \frac{2\ln(10)}{\ln(5) - \ln(2)}$$

Svar: Populationen har ökat till 1000 bakterier efter $t_0 = \frac{2\ln(10)}{\ln(5)-\ln(2)}$ månader. (drygt 5 månader)

---

2. (Module 2)
Finn en lösning till ekvationen

$$f(x) = 1 - x + \int_0^x tf(x-t)dt \text{ för } x > 0.$$

Lösning
Laplacetransformera ekvationen. Låt $F(s)$ vara Laplacetransformen till f vi får då ekvationen

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}F(s)$$

Vi löser ut $F(s)$:

$$(1 - \frac{1}{s^2})F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}.$$
$$(s^2 - 1)F(s) = (s - 1)$$
$$F(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Vi tar inverterar Laplacetransformen $F(s) = \frac{1}{s+1}$ t.ex ur tabell och får då
Svar: $f(x) = e^{-x}$

---

3. (Module 3)
Bestäm allmän lösning till systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Vad händer med en partikel, som placeras i punkten $(3, 2)$, efter lång tid?

Lösning
Vi finner först egenvärden λ som rötter till ekvationen

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Ekavtionen kan omskrivas till

$$(-1-\lambda)(-3-\lambda)+1\cdot 2=\lambda^2+4\lambda+5=0$$

Rötterna blir $\lambda_1=-2+i$ och $\lambda_2=-2-i$.
Vi söker nu en egenvektor $\mathbf{u}$ till egenvärdet $\lambda_1=-2+i$. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ som löser evationen

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0.$$

En lösning till denna ekvation är

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\mathbf{B}_1+i\mathbf{B}_2$$

En komplex lösning till systemet blir nu $\mathrm{e}^{(-2+i)t}\mathbf{u}$. Realdel och imaginärdel av denna lösning så blir två oberoende reella lösningar till systemet. Dessa blir

$$\mathbf{X}_1=\mathrm{e}^{-2t}(\cos(t)\mathbf{B}_1-\sin(t)\mathbf{B2})$$

och

$$\mathbf{X}_2=\mathrm{e}^{-2t}(\sin(t)\mathbf{B}_1+\cos(t)\mathbf{B2})$$

Vi få alltså

$$\mathbf{X}_1=\mathrm{e}^{-2t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}-\sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

och

$$\mathbf{X}_2=\mathrm{e}^{-2t}\left(\sin(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Den allmänna lösning till systemet kan nu skrivas

$$\mathbf{X}(t)=C_1\mathbf{X}_1(t)+C_2\mathbf{X}_2(t),$$

vilket skrives ut som
Svar Allmäm lösning till systemet blir

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}(-C_1\cos(t)-C_2\sin(t)) \\ \mathrm{e}^{-2t}((C_1-C_2)\cos(t)+(C_1+C_2)\sin(t)) \end{pmatrix}.$$

En partikel kommer efter lång tid vara godtyckligt nära origo

4. (Module 4)
Finn den lösning till den partiella differentialekvationen

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<\pi,\quad t>0,$$

som uppfyller randvillkoren

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 1 + 3\cos 5x + 4\cos 7x, \quad 0 < x < \pi.$$

Lösning
Vi anster först en separabel lösning till ekvationen:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Differentialekvatione kan då skrivas:

$$2X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

som separeras till

$$\frac{2X''}{X} = \frac{T'}{T} = -2\mu$$

vilket leder till ekvationerna

$$2X'' + 2\mu X = 0$$

$$T' = -2\mu T$$

Randvillkoren medför att $X'(0) = X'(\pi) = 0$ Icke-triviala lösningar $X(x)$ som uppfyller denna differential ekvation med dessa randvillkor finns i de fall då $\sqrt{\mu} = 0, 1, 2, 3\ldots$ de kan då skrivas $X(x) = C\cos(\mu x)$.
Man kan visa att för negativa μ ger differentialekvationen lösningen $C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\mu}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\mu}t}$ och randvillkoren leder till att $C_1 = C_2 = 0$.
För $\mu = 0$ har vi lösningen $C_1 + C_2 x$ och randvillkoren leder till att $C_2 = 0$ och lösningen kan C_1 kan ju då skrivas $C_1 \cos \mu x$
För μ positiv har vi lösningar $C_1 \sin\sqrt{\mu}x + C_2\cos\sqrt{\mu}x$ och randvillkoret $X'(0) = 0$ medför att $C_1 = 0$. För att lösningen $C_2\cos\sqrt{\mu}x$ ska uppfylla randvillkoret $X'(\pi) = 0$ med C_2 skilt från noll så måste $\sqrt{\mu}$ vara ett heltal. Vi skriver $\mu = n^2, n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$ och motsvarande lösningar $X_n(x) = \cos nx$. Till dessa har vi motsvarande lösningar $T_n(t)$ till differentialekvationerna

$$T' = -2n^2 T$$

Löser dessa och får för varje n en lösning $T_n(t) = \mathrm{e}^{-2n^2 t}$. Produkten $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \mathrm{e}^{-2n^2 t}\cos nx$ uppfyller den ursprungliga differentialekvationen och randvillkoren, men den uppfyller begynnelsevillkoret

$$u_n(x,0) = \cos nx$$

För att uppfylla det ursprungliga begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 1 + 3\cos 5x + 4\cos 7x, \quad 0 < x < \pi.$$

tar vi en superposition av lösningarna $u_n(x,t)$ Vi sätter

$$u(x,t) = u_0(x,t) + 3u_5(x,t) + 4u_7(x,t)$$

Då kommer $u(x,t)$ att uppfylla det ursprungliga begynnelsevillkoret samtidigt som differentialekvationen och randvillkoren blir uppfyllda. Vi skriver
Svar: Funktionen $u(x,t) = 1 + 3\mathrm{e}^{-50t}\cos 5x + 4\mathrm{e}^{-98t}\cos 7x$ uppfyller differentialekvationen och givna rand- och begynnelsevillkor.

---

5. (Module 5)
Låt Ω vara vara det obegränsade området

$$\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Avgör, om den generaliserade integralen

$$\iint_{\Omega} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

divergerar eller om den konvergerar, och bestäm i så fall dess värde

---

Lösning
Vi inför polära koordinater (t,θ) där $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Integranden $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{-r^2}$ och Jacobi- determinanten vid för polära koordinater är r.
Vi integrerar över det ändliga området $\Omega_N = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq N^2, 0 \leq y \leq x\}$ vilket i polära koordinater motvaras av $\tilde{\Omega}_N = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq N, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$. Vi får integralen

$$\iint_{\tilde{\Omega}_N} \mathrm{e}^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^N \mathrm{e}^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{-2}\right]_1^N = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2N}}\right)$$

Tar vi gränsvärdet då N går mot $+\infty$ så ser vi att
Svar: Den generaliserade integralen konvergerar mot värdet $\frac{\pi}{8}$.

---

6. (Module 6)

(a) Visa att fältet

$$\mathbf{F} = (3x^2y^2, 2x^3y)$$

är ett gradientfält.

(b) Finn en potential P sådan att $\mathbf{F} = \text{grad }(P)$.

(c) Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där Γ är kurvan längs ellipsen $16x^2 + 9y^2 = 25$, i positiv, riktning från punkten $(\frac{5}{4}, 0)$ till punkten $(1,1)$.

Lösning

Vi kontrollerar om fälter $\mathbf{F} = (G, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} = 0$.
$Q = 2x^3y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y$ och $G = 3x^2y^2$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 6x^2y$. vilket innebär att villkoret är uppfyllt. Vidare är fältet definerat i hela planet utan några singulära punkter. Detta innebär att det existerar tillräckliga villkor för att det ska existera en potential funktion $P(x, y)$ till fältet.
Det är lätt att verifiera att $P(x, y) = x^3y^2$ är en sådan potential.
Värdet av en linjeintegral med ett sådant fält $\mathbf{F}$ erhålls direkt genom att ta skillnaden av potentialen i ändpunkt och startpunkt. Den givna linjeintegralens värde blir därmed $P(1, 1) - P(\frac{5}{4}, 0) = 1 - 0 = 1$.
Svar: Fältet $\mathbf{F}$ är ett gradientfält, en potential är till $\mathbf{F}$ är funktionen x^3y^2, och den givna linjeintegralens värde är 1.