KTH Matematik

Tentamenskrivning i Matematik IV , 5B1230 Matematik IV, del 3
Lördagen den 4 juni, 2005, kl 14.00 - 19.00

Hälpmedel BETA,Mathematics Handbook
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för Betyg 3 och omfattar 6 moduler (uppgifter).
För godkänt betyg krävs 5 moduler godkända.
GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN VÅREN 2005,
Detta sker enligt följande: Godkänd molul nr i ger uppgift nr i godänd. $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Module 1, LS1 Kapitel 1-3 i Z.C
Module 2, INL1 Kapitel 7 i Z.C
Module 3, LS2 Kapitel 4,8 och 10 Z.C
Module 4, INL2 Kapitel 11-12 i Z.C
Module 5, LS3 Kapitel 9 i E.P
Module 6, LS4 Kapitel 10-11 i E.P

Lycka till!

1. (Module 1)
   I en modell för tillväxt av en population av bakterier, så är tillväxthastigheten av populationen proportionell mot populationens storlek.
   (a) Sätt upp en differentialekvation för antalet $y(t)$ av baktererier i populationen vid tiden t
   (b) Finn allmän lösning till differentialekvationen.
   (c) Vid ett viss tidpunkt ($t = 0$) hade populationen 100 bakterier.
   2 månader senare ($t = 2$) så hade populationen ökat till 250 bakterier. Finn vid vilken tidpunkt som populationen har ökat till 1000 bakterier,

2. (Module 2)
   Finn en lösning till ekvationen
$$f(x) = 1 - x + \int_0^x t f(x-t)dt \text{ för } x > 0.$$

3. (Module 3)
Bestäm allmän lösning till systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Vad händer med en partikel, som placeras i punkten $(3, 2)$, efter lång tid?

4. (Module 4)
Finn den lösning till den partiella differentialekvationen

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

som uppfyller randvillkoren

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = 1 + 3\cos 5x + 4\cos 7x, \quad 0 < x < \pi.$$

5. (Module 5)
Låt Ω vara vara det obegränsade området

$$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Avgör, om den generaliserade integralen

$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

divergerar eller om den konvergerar, och bestäm i så fall dess värde

6. (Module 6)
   (a) Visa att fältet
   $$\mathbf{F} = (3x^2y^2, 2x^3y)$$
   är ett gradientfält.
   (b) Finn en potential P sådan att $\mathbf{F} = \text{grad}\,(P)$.
   (c) Beräkna linjeintegralen
   $$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$
   där Γ är kurvan längs ellipsen $16x^2 + 9y^2 = 25$, i positiv, riktning från punkten $(\frac{5}{4}, 0)$ till punkten $(1, 1)$.