Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1230.

Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 17-24p; 4: 25-31p; 5: 32-39p, inklusive bonus.
Uppgifterna: 1-4, 8 ger 3 poäng vardera, 5 och 7 ger 4 poäng vardera, 9 ger 2 poäng samt 6 och 10 ger 5 poäng vardera.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy$$

där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $x+y=2,\ y=x$ och $y=0$.

Lösning:

Integrera först med avseende på x.

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=y}^{2-y}(2x+3y)\,dx\right\}dy = \int_{y=0}^{1}\left\{(2-y)^2-y^2+3y((2-y)-y)\right\}dy\cdot$$

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\left\{4+2y-6y^2\right\}dy = 4+1-2=3\cdot$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_D (2x+3y)\,dxdy = 3$

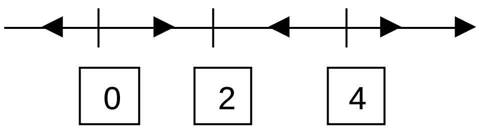
2. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen
$y' = y(2-y)(4-y)$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma stationära lösningar. Då gäller att $y'=0$.
Vi erhåller: $y_1=0$, $y_2=2$ och $y_3=4$.

Teckenstudie av derivatan ger:
$$\begin{cases} y'<0 \text{ då } y<0 & y \text{ avtagande då } y<0.\\ y'>0 \text{ då } 0<y<2 & y \text{ växande då } y<0.\\ y'<0 \text{ då } 2<y<4 & y \text{ avtagande då } y<0.\\ y'>0 \text{ då } 4<y & y \text{ växande då } y<0.\end{cases}$$

Vi ritar det endimensionella fasporträttet.



$y_1=0$ är en instabil kritisk punkt.
$y_2=2$ är en stabil kritisk punkt.
$y_3=4$ är en instabil kritisk punkt.

SVAR: $y_1=0$ och $y_3=4$ är instabila kritiska punkter och $y_2=2$ är en stabil kritisk punkt.

3. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi skriver om systemet på matrisform och bestämmer matrisens egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A}$:s egenvärden erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$.

Vi får $0=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$. Egenvärdena är $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=4$.

Motsvarande egenvektorer $\mathbf{K}$ erhålles ur $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{K}=0$.

För $\lambda_1=-1$ får vi $\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_1=e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$.

För $\lambda_2=4$ får vi $\begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_2=e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av en godtycklig linjärkombination av de två erhållna lösningarna.

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+5y=\delta(t-\frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$, där $\delta(t-\frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2(sY(s)-y(0))+5Y(s)=e^{-s\frac{\pi}{2}}$

$Y(s)(s^2+2s+5)=e^{-s\frac{\pi}{2}}+s+2$ $\qquad Y(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}+\dfrac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s^2+2s+5}$

$$Y(s)=\frac{s+1+\frac{1}{2}2}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

Återtransformera

$$y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+\frac{1}{2}U(t-\frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\frac{\pi}{2}).$$

SVAR: Differentialekvationens lösning är

$$y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+\frac{1}{2}U(t-\frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\frac{\pi}{2})$$

5. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y''+axy'+by=0$ ges av $y_1=x$ och $y_2=x^2$.

Vidare har motsvarande inhomogena differentialekvation en partikulärlösning $y_p=x\ln x$.

Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

Lösning:

Insättning av lösningarna i differentialekvationen ger följande system: $\begin{cases} y_1 = x & x^2 0 + ax1 + bx = 0 \\ y_2 = x^2 & x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2 + 2a + b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases}$.

Den homogena differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

En partikulärlösning är $y_p = x\ln x$ vilket insatt i vänstra ledet ovan ger den inhomogena differentialekvationens högerled.

Vi får $x^2 \frac{1}{x} - 2x(\ln x + x\frac{1}{x}) + 2x\ln x = -x$.

Vår sökta differentialekvation är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.

SVAR: Den sökta differentialekvationen är $x^2 y'' - 2xy' + 2y = -x$.

6. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.

Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

<u>Lösning:</u>

Den finns endast en stationär punkt, origo, ty matrisens determinant är skild ifrån noll.

Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \;,\quad (\lambda + 1)^2 + 1 = 0 \;,\; \lambda = -1 \pm \boldsymbol{i}.$$

Komplexa egenvärden med negativ realdel innebär att det är en stabil spiralpunkt.

Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + \boldsymbol{i}$.

$$0 = \begin{pmatrix} 1-(-1+\boldsymbol{i}) & -1 \\ 5 & -3-(-1+\boldsymbol{i}) \end{pmatrix}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2-\boldsymbol{i} & -1 \\ 5 & -2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}\mathbf{K} \;,\qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning ges av: $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{(-1+\boldsymbol{i})\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}(\cos\boldsymbol{t} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{t})\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \boldsymbol{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Real- och imaginärdelen av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.

$$\mathbf{X_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos\boldsymbol{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin\boldsymbol{t}\right\} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{t} \\ 2\cos\boldsymbol{t} + \sin\boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\left\{-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\boldsymbol{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin\boldsymbol{t}\right\} = \mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \sin\boldsymbol{t} \\ -\cos\boldsymbol{t} + 2\sin\boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = \boldsymbol{c}_1\mathbf{X_1} + \boldsymbol{c}_2\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{c}_1\mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{t} \\ 2\cos\boldsymbol{t} + \sin\boldsymbol{t} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c}_2\mathbf{e}^{-\boldsymbol{t}}\begin{pmatrix} \sin\boldsymbol{t} \\ -\cos\boldsymbol{t} + 2\sin\boldsymbol{t} \end{pmatrix}$.

Egenvärdenas realdel är negativ detta ger att då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat kommer $\mathbf{X}(\boldsymbol{t})$ att gå mot nollvektorn. Partikeln går mot origo längs en spiral, då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat.

SVAR: Den stationära punkten, origo, är en stabil spiralpunkt.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$.

Partikeln går mot origo längs en spiral, då $\boldsymbol{t}$ växer obegränsat.

7. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy,\ x^2 + y^2 \le 9$ har masstätheten $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x, y, z) på plattan. Bestäm plattans totala massa.
Parameterframställ även ytan samt bestäm utgående från detta ytelementet $d\sigma$.

Lösning:

Den totala massan ges av $M = \iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, d\sigma$, där S är den aktuella plattan.

Vi projicerar ytan S på xy-planet.

Då är ytelementet $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, där γ är vinkeln mellan normalen och z-axeln.

En normal till ytan ges av $\mathbf{n} = grad(1 + xy - z) = (y, x, -1)$.

En enhetsnormal till ytan ges av $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(y, x, -1)}{\sqrt{y^2 + x^2 + 1}}$ och således är $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{y^2 + x^2 + 1}}$..

Massan är $M = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \dfrac{dxdy}{\left|\dfrac{-1}{\sqrt{y^2 + x^2 + 1}}\right|} = \iint_{D_{xy}} (1 + x^2 + y^2) dxdy$.

Inför polära koordinater: $M = \iint_{D_{r\theta}} (1 + r^2) r dr d\theta$, där $D_{r\theta} = \{(r, \theta):\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Integration ger: $M = 2\pi \left(\dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^4}{4}\right) = 9\pi \left(1 + \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{99\pi}{2}$.

Ytelementet $d\sigma$ kan beräknas enligt $d\sigma = \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| dxdy$, där $\mathbf{r} = (x, y, 1 + xy)$.

$\mathbf{r}'_x = (1, 0, y)$ och $\mathbf{r}'_x = (0, 1, x)$ vilket ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-y, -x, 1)$ och således $d\sigma = \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$

SVAR: Den totala massan $M = \dfrac{99\pi}{2}$ och ytelementet $d\sigma = \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$.

8. Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt (x, y) på kurvan skär x-axeln i punkten $(x + 1, 0)$?

Lösning:

I en godtycklig punkt (x_0, y_0) på kurvan är tangentens lutning $y'(x_0)$ och normalens $-\dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Normalens ekvation är därför $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Punkten $(x_0 + 1, 0)$ skall ligga på normalen, vilket ger $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{0 - y_0}{x_0 + 1 - x_0}$, $y'(x_0) y_0 = 1$.

Detta skall gälla i varje punkt (x_0, y_0) på kurvan, vilket ger differentialekvationen $y'y = 1$.

Vi har en separabel differentialekvation. Multiplicera med två och integrera.

Vi får $y^2 = 2x + C$ eller $y = \pm\sqrt{2x + C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

SVAR: De sökta kurvorna är $y = \pm\sqrt{2x + C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

9. Den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $-1 < x < 1$ kan utvecklas i en Fourierserie. Bestäm Fourierseriens värde för $x = 1$.

Lösning: Den givna funktionen ej kontinuerlig, men funktionen och dess derivata är styckvis kontinuerlig på hela reella axeln.

Fourierseriens summa för $x = 1$ blir medelvärdet $\dfrac{f(1+) + f(1-)}{2} = \dfrac{0 + 2 \cdot 1}{2} = 1$.

SVAR: Den sökta Fourierseriens seriesumma för $x = 1$ är lika med ett.

10. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i en smal stav. med längden L

Vidare gäller att $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0,\ h$ är en konstant.

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ då begynnelsetemperaturen är $f(x)$ och stavens ändpunkter är isolerade.

Bestäm därefter temperaturen då $L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$.

<u>Lösning:</u>

Vi separerar variablerna: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) - hX(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} + h = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära okopplade differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - (\lambda - h)T(t) = 0 \end{cases}$.

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{(\lambda - h)t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Stavens ändpunkter är isolerade innebär att $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$.

Tillsammans med variabelseparationen ger detta att: $X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$.

Detta skall gälla för alla t: $X'(0) = X'(L) = 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$
$X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$	$X'(x) = A_2$	$X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

Insättning av ändpunkterna ger:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$
$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(A_1 - B_1) \\ 0 = X'(L) = \mu(A_1 e^{\mu L} - B_1 e^{-\mu L}) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(L) = A_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(B_3) \\ 0 = X'(L) = \mu(-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$
Endast den triviala lösningen.	$X(x) = B_2$	$\begin{cases} B_3 = 0 \\ \mu L = n\pi \end{cases}$ $X(x) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L}$

Motsvarande "T-lösningar" blir:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$
	$T(t) = C_2 e^{-ht}$	$T(t) = Ce^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$
$u(x,t) = B_2 C_2 e^{-ht}$	$u(x,t) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L} C_3 e^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.
Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-((\frac{n\pi}{L})^2 + h)t}}$$

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ ger: $\boldsymbol{f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}}$

Koefficienterna är: $\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx}$ och $\boldsymbol{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx}$.

$L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$ ger $f(x) = 2 + \cos 3x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Identifiering ger: $a_0 = 4$, $a_3 = 1$ och övriga $a_n = 0$.

Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-ht} + \cos 3x \;\; e^{-((\frac{3\pi}{L})^2 + h)t}$.

SVAR: Temperaturen $u(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-((\frac{n\pi}{L})^2 + h)t}$

där koefficienterna är: $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$ och $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$.

Speciellt med $L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$ erhålles temperaturen

$$u(x,t) = 2e^{-ht} + \cos 3x \;\; e^{-((\frac{3\pi}{L})^2 + h)t}.$$