KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1230.

Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 17-24p; 4: 25-31p; 5: 32-39p, inklusive bonus.

Uppgifterna: 1-4, 8 ger 3 poäng vardera, 5 och 7 ger 4 poäng vardera, 9 ger 2 poäng samt 6 och 10 ger 5 poäng vardera.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (2x+3y)\,dxdy$$

där D är det ändliga område som begränsas av linjerna $x+y=2,\ y=x$ och $y=0$.

2. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $y' = y(2-y)(4-y)$.

3. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = \delta(t - \frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0)=1$, $y'(0)=0$, där $\delta(t-\frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

5. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0$ ges av $y_1 = x$ och $y_2 = x^2$.

Vidare finns det en motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p = x\ln x$.

Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

6. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.

Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

7. En tunn platta som ges av $z = 1 + xy,\ x^2+y^2 \le 9$ har masstätheten $\sqrt{1+x^2+y^2}$ per ytenhet i varje punkt (x,y,z) på plattan. Bestäm plattans totala massa.

Parameterframställ även ytan samt bestäm utgående från detta ytelementet $d\sigma$.

8. Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt (x,y) på kurvan skär x-axeln i punkten $(x+1,0)$?

9. Den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $-1 < x < 1$ kan utvecklas i en Fourierserie. Bestäm Fourierseriens värde för $x = 1$.

10. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i en smal stav. med längden L

Vidare gäller att $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0,\ h$ är en konstant.

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ då begynnelsetemperaturen är $f(x)$ och stavens ändpunkter är isolerade.

Bestäm därefter temperaturen då $L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$.