KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 13 november 2007, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 6 uppgifter.
För betyg E krävs minst 5 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom minst 5 godkända moduler även 16 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom minst 5 godkända moduler även 12 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom minst 5 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom minst 5 godkända moduler även 4 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1210 eller 5B1230 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För betyg 3 krävs minst 5 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom minst 5 godkända moduler även 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom minst 5 godkända moduler även 15 poäng på del 2.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2007. OBS!
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

I en tank med 200 liter vatten finns även 1500 gram salt. En saltlösning med 5 gram salt per liter pumpas in med 2 liter per minut. Den väl blandade lösningen pumpas ut med samma hastighet.
Bestäm saltmängden i tanken som funktion av tiden t.
Bestäm även saltmängden i tanken efter lång tid.

<u>Lösning:</u>

Låt saltmängden i tanken vid tiden t vara $A(t)$.

Saltmängden uppfyller differentialekvationen $\frac{dA}{dt} = 5\ 2 - \frac{A}{200}\ 2$.

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 10$$

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen.
Vi bestämmer allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.

Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = Ce^{-\frac{t}{100}} + 1000$.
Begynnelsevillkoret $A(0) = 1500$ ger integrationskonstanten.
Vi får $1500 = A(0) = C + 1000$, $C = 500$.

$$A(t) = 500e^{-\frac{t}{100}} + 1000$$

Efter lång tid blir saltmängden 1000 gram, vilket även inses genom att en saltlösning med koncentrationen 5 gram salt per liter pumpas in tanken med 200 liter vatten.

SVAR: Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = 500e^{-\frac{t}{100}} + 1000$.
Efter lång tid är saltmängden 1000 gram.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y = 60\delta(t-3)$$

som uppfyller villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 10$.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformera :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) = 60e^{-3s}$$

Insättning av villkoret ger:

$$(s^2 - 4)Y(s) = 5s + 10 + 60e^{-3s}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s) = \frac{5}{s-2} + \frac{60}{(s+2)(s-2)}e^{-3s}$$

Omformning ger:

$$Y(s) = \frac{5}{s-2} + \left(-\frac{15}{s+2} + \frac{15}{s-2}\right)e^{-3s}$$

Återtransformering ger:

$$y(t) = 5e^{2t} + 15U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{-2(t-3)})$$

SVAR: Den sökta lösningen är

$$y(t) = 5e^{2t} + 15U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{-2(t-3)})$$

<u>Modul 3.</u>

Bestäm först de funktioner som satisfierar den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 36\frac{\partial u}{\partial t}$$

Bestäm de lösningar som även uppfyller randvillkoren $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$.

Bestäm därefter den lösning som även uppfyller begynnelsevillkoret

$u(x,0) = 7 + 5\cos(6x) + 4\cos(18x)$, $0 < x < \pi$.

<u>Lösning:</u>

Vi separerar variablerna: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) = 36X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{36X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda 36X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{\lambda t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2$, $\mu \in \boldsymbol{R}$
$X(x) = A_1e^{6\mu x} + B_1e^{-6\mu x}$	$X(x) = A_2x + B_2$	$X(x) = A_3\cos 6\mu x + B_3\sin 6\mu x$

Randvillkoren $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ tillsammans med variabelseparationen ger att:

$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0$. Detta skall gälla för alla t : $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2$, $\mu \in R$
$X'(x) = 6\mu(A_1e^{6\mu x} - B_1e^{-6\mu x})$	$X'(x) = A_2$	$X'(x) = 6\mu(-A_3\sin 6\mu x + B_3\cos 6\mu x)$

Insättning av ändpunkterna ger:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2$, $\mu \in R$
$\begin{cases} 0 = X'(0) = 6\mu(A_1 - B_1) \\ 0 = X'(\pi) = 6\mu(A_1e^{6\mu\pi} - B_1e^{-6\mu\pi}) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(\pi) = A_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = X'(0) = 6\mu(B_3) \\ 0 = X'(\pi) = 6\mu(-A_3\sin 6\mu\pi + B_3\cos 6\mu\pi) \end{cases}$
Endast den triviala lösningen.	$X(x) = B_2$	$\begin{cases} B_3 = 0 \\ 6\mu\pi = n\pi \end{cases}$ $X(x) = A_3\cos nx$

Motsvarande "T-lösningar" blir:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2$, $\mu \in R$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2$, $\mu \in R$
	$T(t) = C_2$	$T(t) = C_3e^{-\left(\frac{n}{6}\right)^2 t}$

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

$\underline{\lambda = 0}$ $\qquad\qquad$ $\underline{\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad R}$

$u(x,t) = B_2C_2$ $\qquad\qquad$ $u(x,t) = A_3\cos nx\ \ C_3 e^{-\left(\frac{n}{6}\right)^2 t}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ \ e^{-\left(\frac{n}{6}\right)^2 t}$$

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = 7 + 5\cos(6x) + 4\cos(18x)$ ger:

$$7 + 5\cos(6x) + 4\cos(18x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Identifiering ger: $a_0 = 14,\ a_6 = 5,\ a_{18} = 4$ och $a_n = 0$ för övrigt.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = 7 + 5\cos(6x)e^{-t} + 4\cos(18x)e^{-9t}$.

Modul 4.

Lös systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(5,6)$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4$$

Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Det räcker att bestämma egenvektorn till ett av egenvärdena. Vi väljer $\lambda_1 = 1 + 2i$.

Insättning i systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix} 3-1-2i & -2 \\ 4 & -1-1-2i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0},\quad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{K}_1 = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Vi har nu en komplex lösning till systemet. $\mathbf{Z} = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i\sin 2t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Genom att ta realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen erhåller vi två reella linjärt oberoende lösningar till systemet.

$\mathbf{X}_1 = e^t\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^t\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$.

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} e^t\cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^t\sin 2t \\ e^t(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$.

En partikel som placeras i punkten $(5,6)$ kommer att avlägsna sig obegränsat från origo.

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} e^t\cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^t\sin 2t \\ e^t(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat från origo.

Modul 5.

Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} (3x + y)e^{(x+y)(3x+y)}\,dxdy$

där $D_{xy} = \left\{(x,y) : 0 \le x + y \le 1,\ 2 \le 3x + y \le 3\right\}$.

Lösning:

Vi inför nya koordinater: $\begin{cases} u = x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$ $\quad D_{uv} = \{(u,v):\ 0 \le u \le 1,\ 2 \le v \le 3\}$.

Integrationselementet $dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv$, där $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ är funktionaldeterminanten.

Men $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}$ och vi får $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$.

Då blir $dxdy = \left|\frac{1}{-2}\right| dudv = \frac{1}{2} dudv$.

Insättning ger: $\iint_{D_{xy}} (3x+y)e^{(x+y)3x+y()} dxdy = \iint_{D_{uv}} ve^{uv} \frac{dudv}{2} = \frac{1}{2}\int_{v=2}^{3} \left\{ \int_{u=0}^{1} ve^{uv} du \right\} dv$

$$\iint_{D_{xy}} (3x+y)e^{(x+y)(3x+y)} dxdy = \frac{1}{2}\int_{v=2}^{3} \{e^{v} - 1\} dv = \frac{1}{2}(e^3 - e^2 - 1)$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} (3x+y)e^{(x+y)(3x+y)} dxdy = \frac{1}{2}(e^3 - e^2 - 1)$.

<u>Modul 6.</u>

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och med radien två.

<u>Lösning:</u>

En lösning är att tillämpa divergenssatsen.

$$\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = \iiint_K div\mathbf{r}\, dxdydz = \iiint_K (1+1+1) dxdydz = 3 \iiint_K dxdydz.$$

Vi erhåller tre gånger klotets volym.

$$\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = 3\ \frac{4\pi\ \ 2^3}{3} = 32\pi .$$

En annan lösning är att genomföra beräkningen direkt.

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{r} = (x,y,z)$ genom en yta S och i riktningen $\mathbf{n}$ ges av flödesintegralen $\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma$.

En normal till sfären ges av vektorn $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och dess längd är 2.

Integranden blir $\mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (x,y,z)\ \frac{(x,y,z)}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{r^2}{2}$.

På den aktuella ytan är $r = 2$ varvid integranden blir konstant lika med två.

Flödesintegralen blir $\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = \int_S 2 d\sigma = 2\int_S d\sigma$, vilket är sfärens dubbla area.

Vi får $\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = 2\ \ 4\pi\ \ 2^2 = 32\pi$.

SVAR: Utflödet genom sfären är 32π .

<u>Del 2</u>

11.

Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.

Det tvådimensionella hastighetsfältet beskrivs av systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(2+x) \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-y)(1-x-y) \end{cases}$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

Lösning:

I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.
Vi får

$$\begin{cases} 0 = y(2+x) \\ 0 = (x-y)(1-x-y) \end{cases}$$

Detta system har följande lösningar: (0,0), (1,0), (-2,-2) och (-2,3).
För att undersöka de kritiska punkternas karaktär linjariserar vi med hjälp av Jacobimatrisen.
Insättning av respektive kritisk punkt i Jacobimatrisen och bestämning av matrisens egenvärden ger oss möjlighet att bestämma karaktären hos den kritiska punkten.

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y & 2+x \\ 1-x-y-x+y & -1+x+y-x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2+x \\ 1-2x & 2y-1 \end{pmatrix}$$

(0,0) (1,0) (-2,-2) (-2,3)

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \quad \mathbf{J}(-2,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \quad \mathbf{J}(-2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A1} - \lambda\ \mathbf{I})$ där A1 är den aktuella matrisen.

(0,0)

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Egenvärdena har skilda tecken. Instabilt.

(1,0)

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 3 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$$

Egenvärdena är komplexa med negativ realdel. Stabilt.

(-2,-2)

Egenvärdena är -2 och -5. Stabilt.

(-2,3)

Egenvärdena är 3 och 5. Instabilt.

Mörtarna kan få lugn och ro i två punkter: (1,0) och (-2,-2)

SVAR: Mörtarna får lugn och ro i punkterna (1,0) och (-2,-2).

12. Visa att $\{1,\ e^t,\ e^{-t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.
Vidare är $y_p = te^t$ en partikulärlösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.
Bestäm en sådan differentialekvation samt ange dess allmänna lösning.

Lösning:

Vi undersöker om de givna funktionerna är linjärt oberoende.

Bilda Wronskideterminanten $W(1,\ e^t,\ e^{-t}) = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$.

Den givna funktionsmängden kan vara en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Vi bestämmer en sådan differentialekvation.
En homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter av tredje ordningen kan skrivas som $(D-a)(D-b)(D-c)y = 0$ där konstanterna är rötter till den karaktäristiska ekvationen.

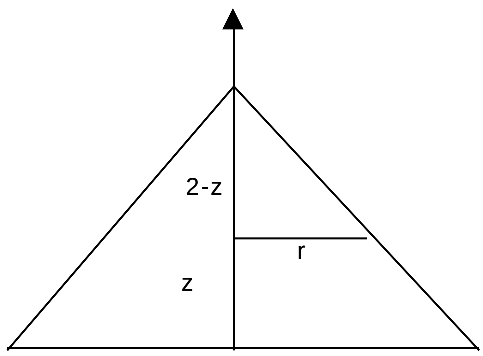
Dessa rötter är i vårt fall: 0, 1 och -1. Det innebär att differentialekvationen har formen
$D(D-1)(D+1)y=0$, $(D^3-D)y$ eller $y'''-y'=0$.
Nu över till den inhomogena differentialekvationen.
Insättning av $y_p=te^t$ i $y'''-y'$ ger högra ledet i den inhomogena differentialekvationen.

$$y'''-y'=-(e^t+te^t)+3e^t+te^t=2e^t$$

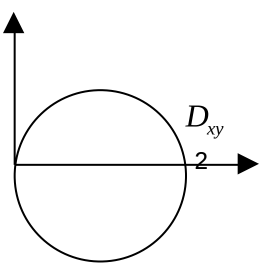
Differentialekvationens allmänna lösning ges av allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.
Den allmänna homogena lösningen är en linjärkombination av de fundamentala lösningarna.
Vi får $y=C_1\ 1+C_2\ e^t+C_3\ e^{-t}+te^t$.

<u>SVAR:</u> Den sökta differentialekvationen är $y'''-y'=2e^t$ och
dess allmänna lösning är $y=C_1\ 1+C_2\ e^t+C_3\ e^{-t}+te^t$.

13. Genom en rät cirkulär kon med basradien 2 och toppvinkeln $\frac{\pi}{2}$ borras parallellt med axeln ett cirkelrunt hål. Hålets skärning med konens basyta har en av dennas radier till diameter.
Beräkna den återstående volymen.
<u>Lösning:</u>
Vi bestämmer först konens volym. Den är basarean gånger höjden genom 3.
Vi får $V_{\text{kon}}=\frac{\pi\ 2^2}{3}2=\frac{8\pi}{3}$.
Därefter beräknar vi den bortborrade delen.
Lägg in en z-axel uppåtriktad och längs konens axel. Basytan ligger i xy-planet.



Låt r vara radien på nivån z. Då toppvinkeln är rät är r och 2-z lika, dvs $z=2-r$.
Den bortborrade volymen ges av $V_{\text{bort}}=\iiint\limits_{V_{\text{bort}}} dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\int_{z=0}^{2-r}dz\right\}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\{2-r\}\,dxdy$.



Området i xy-planet är en cirkelskiva med radien 1.
Dubbelintegralen delas upp i två dubbelintegraler.

$$V_{\text{bort}}=2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}rdxdy$$

Den första integralen är cirkelskivans area, dvs $\pi\ 1^2=\pi$

och i den andra införes polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$ $\quad dxdy = rdrdv \quad$ $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos v \\ -\frac{\pi}{2} < v \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$V_{\text{bort}} = 2\pi - \iint_{D_{rv}} r r dr dv = 2\pi - \int_{v=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{r=0}^{2\cos v} r^2 dr \right\} dv = 2\pi - 2\,\frac{1}{3}\int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3 v\,dv$$

Vid v-integrationen är intervallet origosymmetriskt och funktionen jämn.

$$V_{\text{bort}} = 2\pi - \frac{16}{3}\int_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 v)\cos v\,dv = 2\pi - \frac{16}{3}\left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3}\right]_{v=0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \frac{32}{9}$$

Den återstående volymen $V_{\text{återstående}} = V_{\text{kon}} - V_{\text{bort}} = \frac{8\pi}{3} - (2\pi - \frac{32}{9}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{32}{9}$.

SVAR: Den sökta volymen är $V_{\text{återstående}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{32}{9}$ v.e.

14. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?

b. Undersök om följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots.\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.

c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots.$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

<u>Lösning:</u>

a. Två funktioner, f och g, är ortogonala på intervallet $[0,L]$ då $\int_0^L f(x)g(x)dx = 0$.

b. Vi undersöker om $\int_0^{\pi} \sin nx\ \sin mx dx = 0$ med $n \ne m$.

$$V.L. = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)\,dx$$

$$V.L. = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)}\sin(n-m)x - \frac{1}{(n+m)}\sin(n+m)x\right]_0^{\pi} = 0 = H.L.$$

c. Den reellvärda funktionen f är periodisk med perioden T då $f(t+T) = f(t)$ för alla t .

d. Koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots.$ är fourierkoefficienterna för den udda funktion, som på intervallet $0 < x < \pi$ ges av $f(x) = \cos 2x$.

Koefficienterna ges av $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x\ \sin nx\ \ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(nx+2x) + \sin(nx-2x)\}\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(nx+2x) + \sin(nx-2x)\}\,dx = \{n \ne 2\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1-\cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1-\cos(n-2)\pi}{n-2}\right]\right\} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right]\right\} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\,\frac{2n}{n^2-4}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 \text{ , om } n \text{ är jämnt} \ne 2. \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)} \text{ , om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Vidare gäller $b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(4x)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\pi} = 0$

Anmärkning: En annan lösningsvariant på uppgift d är att först multiplicera $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ med $\sin mx$ och därefter integrera över intervallet $0 < x < \pi$ och utnyttja ortogonaliteten hos följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots.\}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Funktionsföljden är ortogonal. c. Se ovan.
d. Koefficienterna

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{, om } n \text{ är jämnt.} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)} & \text{, om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

Lösning:

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) - c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{80}\right) - c = \frac{y(80-y)}{320} - c = \frac{y(80-y) - 320c}{320} = f(y).$$

b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 - 80y + 320c = 0$, $(y-40)^2 = 1600 - 320c = 320(5-c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \le 5$.

För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 40 \pm \sqrt{320(5-c)}$.

c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f'(y_0)$.

Jämviktslösningen är stabil om $f'(y_0) < 0$ och instabil om $f'(y_0) > 0$.

$f'(y) = \frac{80-2y}{320} = \frac{40-y}{160}$ och insättning av jämviktslösningarna ger

$f'(40 + \sqrt{320(5-c)}) = \frac{-\sqrt{320(5-c)}}{160} < 0$ stabil jämviktslösning.

$f'(40 - \sqrt{320(5-c)}) = \frac{\sqrt{320(5-c)}}{160} > 0$ instabil jämviktslösning.

SVAR:

a. Den nya differentialekvationen är $y' = \frac{y(80-y)}{320} - c$.

b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.

c. Jämviktsnivån $y_0 = 40 + \sqrt{320(5-c)}$.