KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 13 november 2007, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 6 uppgifter.
För betyg E krävs minst 5 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom minst 5 godkända moduler även 16 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom minst 5 godkända moduler även 12 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom minst 5 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom minst 5 godkända moduler även 4 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1210 eller 5B1230 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För betyg 3 krävs minst 5 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom minst 5 godkända moduler även 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom minst 5 godkända moduler även 15 poäng på del 2.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2007. OBS!
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

I en tank med 200 liter vatten finns även 1500 gram salt. En saltlösning med 5 gram salt per liter pumpas in med 2 liter per minut. Den väl blandade lösningen pumpas ut med samma hastighet.
Bestäm saltmängden i tanken som funktion av tiden t.
Bestäm även saltmängden i tanken efter lång tid.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y = 60\delta(t-3)$$

som uppfyller villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 10$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm först de funktioner som satisfierar den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 36\frac{\partial u}{\partial t}$$

Bestäm de lösningar som även uppfyller randvillkoren $u'_x(0,t) = u'_x(\pi,t) = 0$.
Bestäm därefter den lösning som även uppfyller begynnelsevillkoret
$u(x,0) = 7 + 5\cos(6x) + 4\cos(18x)$, $0 < x < \pi$.

<u>Modul 4.</u>

Lös systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(5,6)$.

<u>Modul 5.</u>

Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} (3x+y)e^{(x+y)(3x+y)}\,dxdy$

där $D_{xy} = \{(x,y): 0 \le x+y \le 1,\ 2 \le 3x+y \le 3\}$.

<u>Modul 6.</u>

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och med radien två.

vgv

Del 2

11.

Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.
Det tvådimensionella hastighetsfältet beskrivs av systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(2+x) \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-y)(1-x-y) \end{cases}$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

12. Visa att $\{1,\ e^{t},\ e^{-t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.
Vidare är $y_p = te^{t}$ en partikulärlösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.
Bestäm en sådan differentialekvation samt ange dess allmänna lösning.

13. Genom en rät cirkulär kon med basradien 2 och toppvinkeln $\dfrac{\pi}{2}$ borras parallellt med axeln ett cirkelrunt hål. Hålets skärning med konens basyta har en av dennas radier till diameter.
Beräkna den återstående volymen.

14. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?
b. Undersök om följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots.\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.
c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T för alla t ?
d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots.$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).
a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.
b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.
c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk.
Bestäm y_0 som funktion av c.