KTH Matematik

Kompletteringstentamen i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).
Onsdagen den 28 november 2007, kl 1530-1830.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 6 uppgifter.
För betyg E krävs minst 5 godkända moduler.

De som har registrering på 5B1210 eller 5B1230 erhåller betyg enligt nedan.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För betyg 3 krävs minst 5 godkända moduler.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2007. OBS!

Del 1

Modul 1.

Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera cykliskt(periodiskt) med tiden t, mätt i månader, enligt följande: y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den cykliska faktorn $\cos\frac{\pi t}{6}$.
På morgonen den 16 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton. Den 16 augusti är $y = 3$ ton.
Bestäm $y(t)$ som funktion av t. Bestäm även de största och minsta värdena som $y(t)$ antar och vid vilka tidpunkter som detta sker.

Lösning:

Beståndet, $y(t)$, uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$, där k är en proportionalitetskonstant.
Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningen saknar i detta fall intresse.
Omformning ger: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k\cos\frac{\pi t}{6}$. Integration med avseende på t ger: $\ln|y| = k\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6} + A$.

Lös ut y : $y = \pm e^{A} e^{k\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}} = Ce^{k_0 \sin\frac{\pi t}{6}}$.

Vi bestämmer nu konstanterna med hjälp av villkoren $\begin{cases} 1 = y(0) = C \\ 3 = y(3) = Ce^{k_0 \sin\frac{\pi 3}{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} C = 1 \\ e^{k_0} = 3, \quad k_0 = \ln 3 \end{cases}$.

Beståndet ges av $y(t) = e^{\ln 3 \sin\frac{\pi t}{6}} = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.
Det största värdet, $y = 3$, erhålles då $\sin\frac{\pi t}{6} = 1$, $t = 3 + 12n$, $n \in N$.
Det minsta värdet, $y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, erhålles då $\sin\frac{\pi t}{6} = -1$, $t = 9 + 12n$, $n \in N$.

SVAR: Beståndet uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$ och är $y(t) = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.
Beståndet är störst den 16 augusti varje år och är lika med 3 ton.
Beståndet är minst den 16 februari varje år och är lika med $1/3$ ton.

Modul 2.

Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 14\int_0^t \cos 7u \; f(t-u)du + 28\sin 7t,\ t \ge 0$.
Vidare skall villkoret $f(0) = 0$ vara uppfyllt.

Lösning:

Laplacetransformera :

$$F(s) = 14\frac{s}{s^2+49}F(s) + 28\frac{7}{s^2+49}$$

Hyfsning ger:

$$\frac{s^2+49-14s}{s^2+49}F(s)=28\frac{7}{s^2+49}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$F(s)=\frac{196}{(s-7)^2}$$

Återtransformering ger:

$$f(t)=196te^{7t}$$

SVAR: Den sökta lösningen är

$$f(t)=196te^{7t}$$

Modul 3.

Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x}-10\frac{\partial u}{\partial y}=40u$$

som uppfyller villkoret $u(x,0)=35e^{-3x}+17e^{4x}$.

Lösning:

Vi separerar variablerna: $u(x,y)=X(x)Y(y)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X'(x)Y(y)-10X(x)Y'(y)=40X(x)Y(y)$.

Dividera med $10X(x)Y(y)$: $\dfrac{X'(x)}{10X(x)}-\dfrac{Y'(y)}{Y(y)}=4$, $\dfrac{X'(x)}{10X(x)}=\dfrac{Y'(y)}{Y(y)}+4=\text{konstant}=\lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära differentialekvationer: $\begin{cases} X'(x)-10\lambda X(x)=0 \\ Y'(y)-(\lambda-4)Y(y)=0 \end{cases}$.

$\begin{cases} X(x)=Ae^{10\lambda x} \\ Y(y)=Be^{(\lambda-4)y} \end{cases}$ $\quad u(x,y)=Ae^{10\lambda x}Be^{(\lambda-4)y}=ABe^{10\lambda x+(\lambda-4)y}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som sökes är på formen:

$$u(x,y)=\sum_{\lambda}c_{\lambda}\ e^{10\lambda x+(\lambda-4)y}$$

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Villkoret $u(x,0)=35e^{-3x}+17e^{4x}$ ger: $u(x,0)=35e^{-3x}+17e^{4x}=\sum_{\lambda}c_{\lambda}\ e^{10\lambda x}$

Identifiering ger: $u(x,y)=35e^{-3x+(-\frac{3}{10}-4)y}+17e^{4x+(\frac{4}{10}-4)y}$

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y)=35e^{-3x-\frac{43}{10}y}+17e^{4x-\frac{18}{5}y}$.

Modul 4.

Funktionerna $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x\ln x,\ y_3(x)=5x,\ y_4(x)=x^2$ och $y_5(x)=x+x^2$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation. Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen. Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1)=3,\ y'(1)=2$ och $y''(1)=1$.

Lösning:

En linjär tredje ordningens homogen differentialekvation har tre linjärt oberoende lösningar och dessa bildar en bas för lösningsrummet. Av de fem givna lösningarna väljes tre lösningar ut så de blir linjärt oberoende. Tag till exempel följande: $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x\ln x$ och $y_4(x)=x^2$.

För att visa att dessa lösningar är linjärt oberoende visar vi att Wronskianen är skilt från noll.

$$W(x,\ x\ln x,\ x^2)=\begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & \ln x+1 & 2x \\ 0 & 1/x & 2 \end{vmatrix}=x(2\ln x+2-2)-1(2x\ln x-x)=x>0$$

En fundamental lösningsmängd är $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$.

Den allmänna lösningen kan skrivas $y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^2$.
Det återstår att bestämma den lösning som uppfyller de givna villkoren.
Bilda första- och andraderivatan.

$y' = C_1 + C_2(\ln x + 1) + C_3 2x$ och $y'' = C_2\frac{1}{x} + C_3 2$.

Insättning av villkoren ger: $\begin{cases} 3 = y(1) = C_1 + C_3 \\ 2 = y'(1) = C_1 + C_2 1 + C_3 2 \\ 1 = y''(1) = C_2 + C_3 2 \end{cases}$.

Systemet har lösningen $C_1 = 1$, $C_3 = 2$, $C_2 = -3$. Den sökta lösningen är $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$.

Den lösning som uppfyller de givna villkoren är $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.

Modul 5.

Beräkna arean av den buktiga yta $z = 4 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Lösning:

Arean av den buktiga ytan ges av $\iint_S d\sigma$, där S är den aktuella ytan.

Vi projicerar ytan på xy-planet och erhåller en kvartscirkelskiva i första kvadranten.
Cirkelskivans radie är lika med två.

Ytelementet $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, där $\cos\gamma$ är tredjekomponenten i enhetsnormalen.

Vi bestämmer en normal till rymdytan $z = 4 - x^2 - y^2$.

En normal ges av $\mathbf{n} = grad(x^2 + y^2 + z + 4) = (2x,\ 2y,\ 1)$.

En enhetsnormal är $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(2x,\ 2y,\ 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$ och således $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$.

Ytintegralen övergår då i en dubbelintegral enligt följande $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$.

Inför polära koordinater: $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{rv}} \sqrt{4r^2 + 1}\,rdrdv = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_{r=0}^{2} = \frac{\pi}{24}(17\sqrt{17} - 1)$.

SVAR: Arean av den buktiga ytan är $\frac{\pi}{24}(17\sqrt{17} - 1)$.

Modul 6.

Bestäm konstanten a så att vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{a}{1 + 2x + y^2},\ \frac{2y}{1 + 2x + y^2}\right)$$

får en potential U samt beräkna denna.

Ange därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\ d\mathbf{r}$ med det beräknade värdet på konstanten a, där C är kurvan $y = x^2 - x$ från (0,0) till (2,2).

Lösning:

Betrakta ett område där singulära punkter saknas. Vi betraktar det övre halvplanet.
För att erhålla en potential U skall följande villkor vara uppfyllt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{a}{1 + 2x + y^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2y}{1 + 2x + y^2}\right\}$$

Detta ger:

$$\frac{-a2y}{(1+2x+y^2)^2} = \frac{-2\ \ 2y}{(1+2x+y^2)^2}$$

Det ger oss att $a = 2$.

För en potential U gäller att $dU = \mathbf{F}\ \ d\mathbf{r}$, dvs

$$dU = U'_x dx + U'_y dy = \mathbf{F}\ \ d\mathbf{r}$$

Vi får i vårt fall följande system av partiella differentialekvationer.

$$\begin{cases} U'_x = \dfrac{2}{1+2x+y^2} & \qquad U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + g(y) \\ \\ U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} & \qquad U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} + g'(y) \end{cases}$$

Identifiering ger $g'(y) = 0$, $g(y) = C$.

Den sökta potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$.

Vid beräkning av linjeintegralen utnyttjar vi potentialen.

$$\int_C \mathbf{F}\ \ d\mathbf{r} = \int_C dU = U(2,2) - U(0.0) = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9 = 2\ln 3$$

SVAR: Konstanten $a = 2$. Potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$. Linjeintegralen är $\int_C \mathbf{F}\ \ d\mathbf{r} = 2\ln 3$.