KTH Matematik

Kompletteringstentamen i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).
Onsdagen den 28 november 2007, kl 1530-1830.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 6 uppgifter.
För betyg E krävs minst 5 godkända moduler.

De som har registrering på 5B1210 eller 5B1230 erhåller betyg enligt nedan.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 uppgifter.
För betyg 3 krävs minst 5 godkända moduler.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN HÖSTEN 2007. OBS!

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera cykliskt(periodiskt) med tiden t, mätt i månader, enligt följande: y:s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den cykliska faktorn $\cos\frac{\pi t}{6}$.
På morgonen den 16 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton. Den 16 augusti är $y = 3$ ton.
Bestäm $y(t)$ som funktion av t. Bestäm även de största och minsta värdena som $y(t)$ antar och vid vilka tidpunkter som detta sker.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 14\int_0^t \cos 7u \; f(t-u)du + 28\sin 7t,\; t \geq 0$.

Vidare skall villkoret $f(0) = 0$ vara uppfyllt.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 10\frac{\partial u}{\partial y} = 40u$$

som uppfyller villkoret $u(x,0) = 35e^{-3x} + 17e^{4x}$.

<u>Modul 4.</u>

Funktionerna $y_1(x) = x,\; y_2(x) = x\ln x,\; y_3(x) = 5x,\; y_4(x) = x^2$ och $y_5(x) = x + x^2$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation. Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen. Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3,\; y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$.

<u>Modul 5.</u>

Beräkna arean av den buktiga yta $z = 4 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

<u>Modul 6.</u>

Bestäm konstanten a så att vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{a}{1+2x+y^2},\; \frac{2y}{1+2x+y^2}\right)$$

får en potential U samt beräkna denna.
Ange därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ med det beräknade värdet på konstanten a, där C är kurvan $y = x^2 - x$ från (0,0) till (2,2).