KTH Matematik

Lösningar till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Onsdagen den 16 januari 2008, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

<u>Betygsgränser</u> A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

<u>Betygsgränser</u> 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

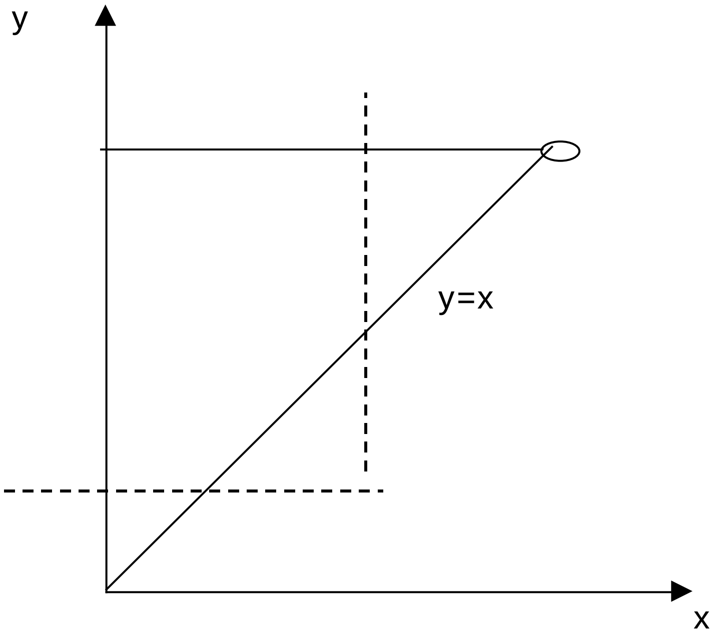
1. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left\{\int_{y=x}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos y^2\,dy\right\}dx$.

<u>Lösning:</u>

Integranden är svår att integrera med avseende på y.

Däremot går det bra att integrera med avseende på x.

Vi ritar upp området och kastar om integrationsordningen.



$$\int_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left\{\int_{y=x}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos y^2\,dy\right\}dx=\int_{y=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left\{\int_{x=0}^{y}\cos y^2\,dx\right\}dy=\int_{y=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}y\cos y^2\,dy=\left[\frac{1}{2}\sin y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}$$

SVAR: Dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left\{\int_{y=x}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos y^2\,dy\right\}dx=\frac{1}{2}$.

2. Vilket arbete uträttar kraftfältet $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{(-y,x)}{x^2+9y^2}$ $(x,y)\neq\mathbf{0}$ ett varv längs cirkeln $x^2+y^2=4$?

<u>Lösning:</u>

Arbetet ges av kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F}\ \mathbf{dr}=\int_\Gamma\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+9y^2}$.

Vi undersöker om kurvintegralen är oberoende av vägen.

Den enda singulära punkten är origo.

$$\begin{cases} Q = \dfrac{x}{x^2+9y^2} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1\cdot(x^2+9y^2)-2x\cdot x}{(x^2+9y^2)^2} \\ P = \dfrac{-y}{x^2+9y^2} & \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1\cdot(x^2+9y^2)-18y\cdot y}{(x^2+9y^2)^2} \end{cases}$$

Derivatorna $\dfrac{\partial O}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ är lika.

I ett enkelt sammanhängande område som inte innehåller origo kan vi byta väg.
Vi väljer kurvan $x^2+9y^2=1$ och tagen i positiv riktning.

Parameterframställning av kurvan: $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{3}\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} dx=-\sin t\,dt \\ dy=\frac{1}{3}\cos t\,dt \end{cases}$ $t:0\to 2\pi$.

Insättning i $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+9y^2}$ ger:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+9y^2} = \int_{t=0}^{2\pi}\left\{-\frac{1}{3}\sin t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\left(\frac{1}{3}\cos t\right)\right\}dt = \frac{2\pi}{3}$$

SVAR: Kraftfältet uträttar arbetet $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=(xz,\ yz,\ 1)$ ut genom ytan S definierad av $S=\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2,\ 0\le z\le 1\}$. S är orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

<u>Lösning:</u>

Flödet ges av integralen $\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$.

Vi bestämmer först en normal till ytan S.
En sådan ges av $\mathbf{n}_2 = grad(x^2+y^2-z) = (2x,2y,-1)$.
Men normalen skall ha en positiv z-koordinat.
Byt riktning hos normalen och bilda motsvarande enhetsnormal.
Vi får $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$.

Projicera ytan på xy-planet $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \dfrac{dxdy}{\left|\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right|}$.

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}=(xz,\ yz,\ 1)\cdot\frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} = \frac{-2x^2z-2y^2z+1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

På ytan S gäller att $z=x^2+y^2$ vilket insättes i uttrycket $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma$ ger:

$$\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \frac{1-2(x^2+y^2)^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot\frac{dxdy}{\left|\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right|} = (1-2(x^2+y^2)^2)dxdy$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{D_{xy}}(1-2(x^2+y^2)^2)dxdy$$

Området i xy-planet ges av enhetscirkeln. Inför polära koordinater.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_{D_{rv}}(1-2r^4)rdrdv = 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Ett annat alternativ är att använda divergenssatsen.
Dock måste ytan slutas först.
Slut med cirkelskivan $S_1 = \{(x,y,z): \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 1\}$.

Vi får $\iint_S \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}} d\sigma + \iint_{S_1} \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}}_1 d\sigma = -\iiint_K div(xz, \ yz, \ 1) dxdydz$

Här använder vi den inåtriktade normalen till ytan S_1 och den ges av $\mathbf{n}_1 = (0,0,-1)$

Insättning ger $\iint_S \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}} d\sigma + \iint_{S_1} -1 d\sigma = -\iiint_K 2z dxdydz$.

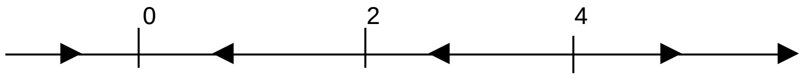
$$\iint_{S_1} -1 d\sigma = -\text{Arean av } S_1 = -\pi 1^2 = -\pi$$

$$\iiint_K 2z dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=x^2+y^2}^{1} 2z dz \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left\{ 1 - (x^2+y^2)^2 \right\} dxdy = \iint_{D_{rv}} \left\{ 1 - r^4 \right\} r dr dv = 2\pi \ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}} d\sigma = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}}_1 d\sigma - \iiint_K div(xz, \ yz, \ 1) dxdydz = +\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

SVAR: Det sökta flödet är $\iint_S \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{\pi}{3}$.

4. Konstruera en autonom första ordningens differentialekvationen $y' = f(y)$, vars fasporträtt ges av nedanstående figur. Finns det någon stabil jämviktslösning ?



Lösning:
Jämviktslösningarna är 0, 2 och 4. Jämviktslösningen 2 är dubbel.
En autonom första ordningens differentialekvation ges av $y' = y(y-2)^2(y-4)$.
0 är en stabil jämviktslösning.

SVAR: En autonom första ordningens differentialekvation ges av $y' = y(y-2)^2(y-4)$.
$y = 0$ är den enda stabila jämviktslösningen.

5. I en populationsmodell är den *relativa* tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant minus en annan konstant gånger antalet djur. Konstanterna är positiva. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive 1.
Bestäm populationen som funktion av tiden t då den vid tiden 0 år lika med 1000.

Lösning:
Låt populationen vid tiden t vara $P(t)$.

Differentialekvationen blir $\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{dt} = a - bP(t)$, $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$.

Med de givna konstanterna insatta erhålles $\frac{dP}{dt} = 5000P - P^2$.

Differentialekvationen är av Bernoulli typ(den är även separabell).

Vi omformar differentialekvationen: $P^{-2} \frac{dP}{dt} = 5000P^{-1} - 1$.

Sätt $z = P^{-1}$, $\frac{dz}{dt} = -P^{-2} \frac{dP}{dt}$.

Insättning ger: $-\dfrac{dz}{dt} = 5000z - 1$, $\dfrac{dz}{dt} + 5000z = 1$, vilken är linjär med konstanta koefficienter.
Dess lösning erhålles som allmän homogen lösning plus en partikulärlösning.
Vi erhåller $z = \dfrac{A}{5000}e^{-5000t} + \dfrac{1}{5000} = \dfrac{Ae^{-5000t}+1}{5000}$. Populationen är $P(t) = \dfrac{5000}{Ae^{-5000\ t}+1}$.
Villkoret ger värdet på konstanten: $P(0) = \dfrac{5000}{A+1} = 1000$, $A = 4$.
SVAR: Populationen är $P(t) = \dfrac{5000}{4e^{-5000\ t}+1}$.

6. Bestäm $y(\pi)$ då

$$y'' + 9y = 18U(t - \frac{\pi}{2})\cos 3t$$

och $y(0) = 7$ och $y'(0) = 9$, $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

<u>Lösning:</u>
Högra ledet kan omformas

$$\cos 3t = \cos 3(u + \frac{\pi}{2}) = \cos 3u \cos\frac{3\pi}{2} - \sin 3u \sin\frac{3\pi}{2} = \sin 3u = \sin 3(t - \frac{\pi}{2})$$

Vi får

$$y'' + 9y = 18U(t - \frac{\pi}{2})\sin 3(t - \frac{\pi}{2})$$

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = 18e^{-\frac{\pi}{2}s}\dfrac{3}{s^2+9}$.

Insättning av villkoren och hyfsning ger: $Y(s) = \dfrac{7s+9}{s^2+9} + \dfrac{54e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+9)^2}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 7\cos 3t + 3\sin 3t + U(t - \frac{\pi}{2})(\sin 3(t - \frac{\pi}{2}) - 3(t - \frac{\pi}{2})\cos 3(t - \frac{\pi}{2}))$.
Insättning av $t = \pi$ ger $y(\pi) = -7 - 1 = -8$.
SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(\pi) = -7 - 1 = -8$.

7. Betrakta funktionen given av

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & , \quad 0 < x < 4 \\ -3 + x & , \quad -4 < x < 0 \end{cases}.$$

Vidare gäller att $h(x+8) = h(x)$. Bestäm Fourierserien hörande till funktionen h.
Bestäm vidare Fourierseriens summa för $x = 6$ och $x = 20$.

<u>Lösning:</u>
Den givna funktionen är udda.
Fourierserien är på formen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{4}$, där $b_n = \dfrac{2}{4}\displaystyle\int_0^4 (3+x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$.

Partiell integration ger $b_n = \dfrac{1}{2}\left\{\left[(3+x)\dfrac{-4\cos\frac{n\pi x}{4}}{n\pi}\right]_0^4 - \displaystyle\int_0^4 1\,\dfrac{-4\cos\frac{n\pi x}{4}}{n\pi}\,dx\right\} = 2\,\dfrac{3 - 7\cos n\pi}{n\pi}$.

Den sökta fourierserien ges av $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{3 - 7\cos n\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}$.

Funktionen h är periodisk med perioden 8.

$$h(6) = h(-2+8) = h(-2) = -3 - 2 = -5$$

$h(20) = h(2\ \ 8+4) = h(4)$
Fourierseriens summa för $x = 6$ är -5.
Fourierseriens summa för $x = 20$ erhålles som medelvärdet av $h(4)$ och $h(-4)$.
Vi erhåller $\dfrac{h(4)+h(-4)}{2} = \dfrac{(3+4)+(-3-4)}{2} = 0$

SVAR: Den sökta fourierserien är $\sum_{n=1}^{\infty} 2\ \dfrac{3-7\cos n\pi}{n\pi} \sin\dfrac{n\pi x}{4}$.
Fourierseriens summa för $x = 6$ är -5.
Fourierseriens summa för $x = 20$ är 0.

8. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen (som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden t, mätt i timmar, med $W(0) = W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets yta och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).
a) Härled att differentialekvationen för W bör ha formen $\dfrac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där k är en konstant.
b)Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}\,\mathrm{g}$ och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3\ \ 10^{-6}\,\mathrm{g}\ (1{,}331\ \ 10^{-6}\,\mathrm{g})$.
c)Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2\ \ 10^{-6}\,\mathrm{g}$.
När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)
<u>Lösning:</u>
a) Cellens massa är $W = \rho V = \rho\dfrac{4\pi}{3}r^3$, ρ är densiteten och r är sfärens radie.
Membranets area är $A = 4\pi r^2$. Uttryck A i W. $A = 4\pi((\dfrac{3W}{4\pi\rho})^{1/3})^2 = 4\pi((\dfrac{3}{4\pi\rho})^{2/3}W^{2/3} = k_1W^{2/3}$.
Massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets area ger: $\dfrac{dW}{dt} = k_2A = k_2k_1W^{2/3} = kW^{2/3}$.
b) $\dfrac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ är separabel , dock saknar den triviala lösningen intresse.
Omforma differentialekvationen: $W^{-2/3}\dfrac{dW}{dt} = k$.
Vi integrerar med avseende på t: $3W^{1/3} = kt + C$.
Begynnelsevillkoret $W(0) = 10^{-6}$ ger: $3(10^{-6})^{1/3} = C$, $C = 3\ \ 10^{-2}$. $3W^{1/3} = kt + 3\ \ 10^{-2}$.
Bestäm k. Efter 1 timme är massan $1{,}1^3\ \ 10^{-6}\,\mathrm{g}$.
$3(1{,}1^3\ \ 10^{-6})^{1/3} = k + 3\ \ 10^{-2}$, $k = 3\ \ 0{,}1\ \ 10^{-2} = 3\ \ 10^{-3}$, $3W^{1/3} = 3\ \ 10^{-3}t + 3\ \ 10^{-2}$.
Cellens massa vid tiden t ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t+1)^3 g$.
c) Bestäm tidpunkten, t_2, då cellens massa är fördubblad.
$2\ \ 10^{-6} = 10^{-6}(0{,}1t_2+1)^3$, $t_2 = 10(2^{1/3}-1) \approx 10(1{,}26-1) = 2{,}6$.
Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.
SVAR: b) Cellens massa vid tiden t ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t+1)^3 g$.
c) Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.

9.a. *Härled* en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.
b. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$, då $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Lösning:

a. Vi utgår från den allmänna homogena lösningen, vilken kan skrivas: $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.
En partikulärlösning ansättes som: $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}$, där $\mathbf{U}$ är en tidsberoende vektor.
Insättning i systemet av differentialekvationer ger: $\Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$.
Kolonnerna i fundamentalmatrisen Φ består av linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet.
Detta innebär att varje kolonn uppfyller det homogena systemet och således uppfyller även fundamentalmatrisen detsamma, med andra ord gäller att $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Vi erhåller då: $\mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$, $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$. Lös ut $\mathbf{U}'$.
Multiplicera med fundamentalmatrisens invers. Den existerar ty $\det\Phi \neq 0$. Vi erhåller $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{F}$.
Integration ger: $\mathbf{U} = \int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$. Vi har erhållit $\mathbf{X}_p = \Phi\int\Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$.

b. Vi bestämmer först två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet och använder därefter variation av parametrar, se a., för att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet.
Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.

För att erhålla lösningar till det homogena systemet bestämmer vi egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, $\lambda = \pm i$. Vi har erhållit komplexa egenvärden och bestämmer då en komplex egenvektor. Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = i$.

Vi söker icke-triviala lösningar till systemet $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilka ges av $\mathbf{v} = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $r_1 \in R$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger oss två linjärt oberoende lösningar.

Vi omformar den komplexa lösningen: $\mathbf{Z} = (\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ och $\operatorname{Im}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ är två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet.

Variation av parametrar innebär att vi behöver en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning erhålles som $\mathbf{X_p} = \Phi\int\Phi^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}dt$. Inversen blir $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

$$\int\Phi^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}dt = \int\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin t}{\cos t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} t \\ -\ln|\cos t| \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_p} = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln|\cos t| \\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t| \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln|\cos t| \\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t| \end{pmatrix}$

SVAR: a. Se ovan. b. Den allmänna lösningen är: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln|\cos t| \\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t| \end{pmatrix}$