KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Onsdagen den 16 januari 2008, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

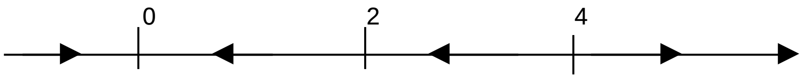
Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left\{ \int_{y=x}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos y^2\, dy \right\} dx$.

2. Vilket arbete uträttar kraftfältet $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{(-y,x)}{x^2+9y^2}$ $(x,y) \neq \mathbf{0}$ ett varv längs cirkeln $x^2+y^2=4$?

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz,\ yz,\ 1)$ ut genom ytan S definierad av $S = \left\{(x,y,z):\ z = x^2+y^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$. S är orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

4. Konstruera en autonom första ordningens differentialekvationen $y' = f(y)$, vars fasporträtt ges av nedanstående figur. Finns det någon stabil jämviktslösning ?



5. I en populationsmodell är den *relativa* tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant minus en annan konstant gånger antalet djur. Konstanterna är positiva. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive 1.
Bestäm populationen som funktion av tiden t då den vid tiden 0 år lika med 1000.

6. Bestäm $y(\pi)$ då

$$y'' + 9y = 18U(t - \frac{\pi}{2})\cos 3t$$

och $y(0) = 7$ och $y'(0) = 9$, $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

7. Betrakta funktionen given av

$$h(x) = \begin{cases} 3+x & , \quad 0 < x < 4 \\ -3+x & , \quad -4 < x < 0 \end{cases}.$$

Vidare gäller att $h(x+8) = h(x)$. Bestäm Fourierserien hörande till funktionen h.
Bestäm vidare Fourierseriens summa för $x = 6$ och $x = 20$.

8. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen (som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden t, mätt i timmar, med $W(0) = W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets yta och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).

a) Härled att differentialekvationen för W bör ha formen $\dfrac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där k är en konstant.

b)Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}\,\mathrm{g}$ och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3\ 10^{-6}\,\mathrm{g}\ (1{,}331\ 10^{-6}\,\mathrm{g})$.

c)Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2\ 10^{-6}\,\mathrm{g}$.
När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)

9.a. *Härled* en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.

b. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$, då $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.