KTH Matematik

Lösningar till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 19 augusti 2008, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

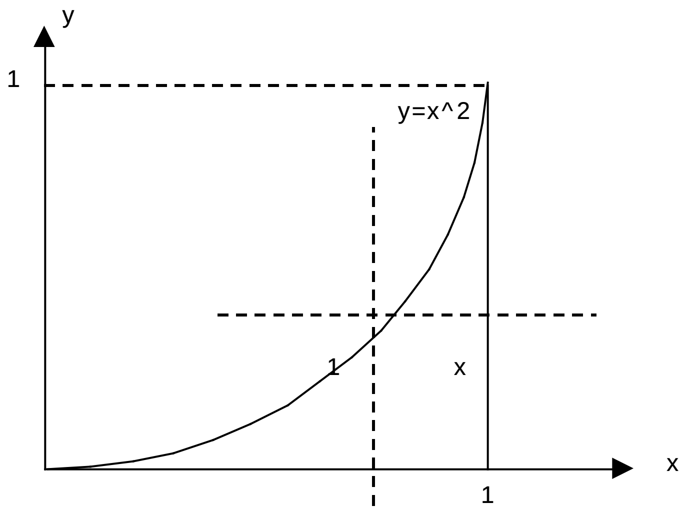
<u>Betygsgränser</u> A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

<u>Betygsgränser</u> 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 3e^{-x^3}\,dx \right\} dy$.

<u>Lösning:</u>

Integranden är svår att integrera med avseende på y.
Däremot går det bra att integrera med avseende på x.
Vi ritar upp området och kastar om integrationsordningen.



$$\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 3e^{-x^3}\,dx \right\} dy = \int_{x=0}^1 \left\{ \int_{y=0}^{x^2} 3e^{-x^3}\,dy \right\} dx = \int_{x=0}^1 3x^2 e^{-x^3}\,dx = \left[-e^{-x^3}\right]_{x=0}^1 = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$$

SVAR: Dubbelintegralen $\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 3e^{-x^3}\,dx \right\} dy = \frac{e-1}{e}$.

2. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = y$.

<u>Lösning:</u>

Volymen ges av integralen $V = \iiint_K dxdydz$, där K är det aktuella området.

Integrera först med avseende på z

$$V = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=x^2+y^2}^{y} dz \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left\{ y - x^2 - y^2 \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left\{ \frac{1}{4} - (x^2 + (y - \frac{1}{2})^2) \right\} dxdy \text{ .}$$

Vi bestämmer skärningen mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = y$.

Skärningens projektion på xy-planet ges av cirkeln $x^2 + y^2 = y$.

Inför polära koordinater utgående från cirkelns centrum. Cirkelns ekvation kan skrivas:

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Sätt: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y - \frac{1}{2} = r\sin t \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} r:\ 0 \to \frac{1}{2} \\ t:\ 0 \to 2\pi \end{matrix}$ $\quad dxdy = rdrdt$.

$$V = \iint_{D_{rt}} \left\{ \frac{1}{4} - r^2 \right\} rdrdt = 2\pi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} \right) = \frac{\pi}{32}$$

SVAR: Den sökta volymen är $V = \frac{\pi}{32}$ volymsenheter.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = grad(x^3 + y^3 + z^3)$ ut ur cylindern given av olikheterna $x^2 + y^2 \le 9,\ -1 \le z \le 2$.

<u>Lösning:</u>

Flödet ges av integralen $\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$.

Vi använder divergenssatsen, vilket går bra då villkoren är uppfyllda.

Vi får $\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K div\mathbf{v}dxdydz$, där K är det av S inneslutna området.

$$\mathbf{v} = grad\,(x^3 + y^3 + z^3) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$$

$$div\mathbf{v} = div(3x^2, 3y^2, 3z^2) = 6x + 6y + 6z$$

Integrera först med avseende på z .

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K div\mathbf{v}dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=-1}^{2} (6x + 6y + 6z)dz \right\} dxdy$$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left\{ 18x + 18y + 3(2^2 - (-1)^2) \right\} dxdy$$

Delar av integranden är udda funktioner och området är origosymmetriskt vilket ger att dess bidrag till integralen är noll.

Vi får då $\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iint_{D_{xy}} 9\,dxdy = 9 \cdot \text{Områdets area} = 9 \cdot \pi 3^2 = 81\pi$.

SVAR: Det sökta flödet är $\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = 81\pi$.

4. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$.

<u>Lösning:</u>

Den givna differentialekvationen är separabel. a) Konstantlösningar: $y = \pm 3$.

b) Vi bestämmer nu icke-konstanta lösningar och för dessa gäller att $y \ne \pm 3$.

Omforma differentialekvationen: $\frac{1}{y^2 - 9}\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{1}{(y+3)(y-3)}\frac{dy}{dx} = 1$, $\left(\frac{-1}{y+3} + \frac{1}{y-3} \right)\frac{dy}{dx} = 6$.

Integrera med avseende på x: $-\ln|y+3| + \ln|y-3| = 6x + \ln|C_1|$, $\frac{y-3}{y+3} = \pm C_1 e^{6x} = Ce^{6x}$, $y = \frac{3Ce^{6x} + 3}{1 - Ce^{6x}}$.

SVAR: Differentialekvationen har konstantlösningarna $y = \pm 3$ samt lösningarna $y = \frac{3Ce^{6x} + 3}{1 - Ce^{6x}}$.

5. För ett linjärt system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}$ är en konstant 2x2-matris har egenvärdena bestämts. Matrisens determinant är skild ifrån noll.
Klassificera systemets kritiska punkt med avseende på typ och stabilitet/instabilitet då följande egenvärden erhållits:
a) $\lambda_{1,2} = \pm\boldsymbol{i}$. b) $\lambda_{1,2} = 5 \pm 3$. c) $\lambda_{1,2} = -3 \pm \boldsymbol{i}$. d) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5$.

Lösning:
a) Egenvärdena är rent imaginära.
Detta innebär att den kritiska punkten, origo, är en center och därmed stabil.
b) Egenvärdena är skilda och positiva.
Detta innebär att den kritiska punkten, origo, är en instabil nod.
c) Egenvärdena är komplexa och med en realdel som är negativ.
Detta innebär att den kritiska punkten, origo, är en stabil spiral.
d) Egenvärdena har olika tecken.
Detta innebär att den kritiska punkten, origo, är en sadelpunkt och därmed instabil.

SVAR: a) Center och stabil. b) Instabil nod. c) Stabil spiral. d) Sadelpunkt och därmed instabil.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' + 6y' + 9y = 40e^{-3t}$$
som uppfyller villkoren $y(0) = 9$ och $y'(0) = 7$.

Lösning:
Laplacetransformera differentialekvationen:
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = 40\frac{1}{s+3}.$$
Insättning av villkoren och hyfsning ger:
$$(s^2 + 6s + 9)Y(s) - 9s - 7 - 6(9) = 40\frac{1}{s+3}, \quad (s+3)^2Y(s) = 9s + 61 + 40\frac{1}{s+3}$$
Hyfsning ger: $Y(s) = \frac{9s+61}{(s+3)^2} + \frac{40}{(s+3)^3} = \frac{9(s+3)+34}{(s+3)^2} + \frac{40}{(s+3)^3} = \frac{9}{s+3} + \frac{34}{(s+3)^2} + \frac{40}{(s+3)^3}$.
Återtransformering ger: $y(t) = e^{-3t}(9 + 34t + 20t^2)$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = e^{-3t}(9 + 34t + 20t^2)$.

7. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Lösning:
Vi bestämmer först två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet och använder därefter variation av parametrar för att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet.
Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
För att erhålla lösningar till det homogena systemet bestämmer vi egenvärdena till matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$
Bestäm en egenvektor till respektive egenvärde.
Vi söker icke-triviala lösningar till systemet $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilka ges av $\mathbf{v}_1 = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r_1 \quad R$.

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilka ges av $\mathbf{v}_2 = r_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r_2 \quad R$.

Två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet är $\mathbf{X}_1 = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den allmänna homogena lösningen ges av:

$$\mathbf{X}_h = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Variation av parametrar innebär att vi behöver en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning erhålles som $\mathbf{X}_\mathbf{p} = \Phi\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}dt$.

Inversen till fundamentalmatrisen blir $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{e^{3t}}\begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

$$\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}dt = \int\begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} -e^t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + te^{2t} \\ -e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = c_1 e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} + te^{2t} \\ -e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} -e^{2t} + te^{2t} \\ -e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix} -e^{2t} + te^{2t} \\ -e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix}$.

8. Bestäm fourierserien för funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \sin^2 t$ för $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

<u>Lösning:</u>

Fourierserien för en π-periodisk är på formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi t}{\pi/2} + b_n\sin\frac{n\pi t}{\pi/2}\right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos 2nt + b_n\sin 2nt\right\}.$$

Den givna funktionen kan omformas till $f(t) = \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2t}{2}$.

Detta är fourierserien för den givna funktionen.

SVAR: Den sökta fourierserien är $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2t}{2}$.

<u>Anm.</u> Fourierkoefficienterna för den jämna funktionen, då är $b_n = 0$, kan beräknas enligt $a_0 = \dfrac{2}{\pi/2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt$ och $a_n = \dfrac{2}{\pi/2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos 2nt\,dt$.

9. Det har ösregnat under en längre tid. Vatten har helt fyllt ett 100 m långt och 2 m brett dike. Dikets vertikala genomskärningsprofil har V-form, i form av en halv kvadrat, delad längs en horisontell diagonal, 2 m lång. Regnet har upphört vid tidpunkten $t=0$.

a) Antag att diket nedtill är helt tätt så att vattnet endast kan försvinna genom avdunstning uppåt. Låt $V(t)$ vara vattenvolymen vid tiden $t>0$, med t mätt i dagar.

Visa att $V(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $\frac{dV}{dt}=-k\sqrt{V}$, $k=$positiv konstant, om avdunstningshastigheten(i m^3/dag) är proportionell mot den fria vattenytans area.

b) Bestäm $V(t)$ om $V(0)=100$ m^3 (=helt fyllt dike) och $V(1)=99$ m^3.

c) När är diket torrlagt? ($\sqrt{99}\approx 9{,}95$).

<u>Lösning:</u>

a) Låt h vara vattenståndet i det triangulära diket. Då är tvärsnittets area $A=2\ \frac{h^2}{2}=h^2$.

Vattenvolymen är: $V(t)=100\ \ A=100h^2,\ \ h=\frac{\sqrt{V}}{10}$. Den fria vattenytans area är $100\ \ 2h$.

Avdunstningshastigheten $\frac{dV}{dt}=-k_1 100\ \ 2h=-k_1 200\frac{\sqrt{V}}{10}=-k\sqrt{V}$. VSV

b) Differentialekvationen $\frac{dV}{dt}=-k\sqrt{V}$ är separabel. Den triviala lösningen saknar intresse.

För att få icke-triviala lösningar omformas differentialekvationen till: $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{dV}{dt}=-k$.

Integration ger: $2\sqrt{V}=-kt+C$.

Villkoret $V(0)=100$ ger $C=20$.

Villkoret $V(1)=99$ och $C=20$ ger $2\sqrt{99}=-k+20$, $k=20-2\sqrt{99}$.

Insättning av konstanterna ger: $2\sqrt{V}=-(20-2\sqrt{99})t+20$, $V=\left\{10-(10-\sqrt{99})t\right\}^2$.

c) Diket är tomt då $V=0$ vilket inträffar för $t=\frac{10}{10-\sqrt{99}}=\frac{10(10+\sqrt{99})}{100-99}=10(10+\sqrt{99})\approx 199{,}5$

SVAR: a) Se ovan. b) $V=\left\{10-(10-\sqrt{99})t\right\}^2$. c) Diket är torrlagt efter $199{,}5$ dagar.