KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 19 augusti 2008, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen $\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{y}}^1 3e^{-x^3}\,dx \right\} dy$.

2. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = y$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = grad(x^3 + y^3 + z^3)$ ut ur cylindern given av olikheterna $x^2 + y^2 \le 9,\ -1 \le z \le 2$.

4. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$.

5. För ett linjärt system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}$ är en konstant 2x2-matris har egenvärdena bestämts.
Matrisens determinant är skild ifrån noll.
Klassificera systemets kritiska punkt med avseende på typ och stabilitet/instabilitet då följande egenvärden erhållits:

a) $\lambda_{1,2} = \pm \boldsymbol{i}$. b) $\lambda_{1,2} = 5 \pm 3$. c) $\lambda_{1,2} = -3 \pm \boldsymbol{i}$. d) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 5$.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 6y' + 9y = 40e^{-3t}$$

som uppfyller villkoren $y(0) = 9$ och $y'(0) = 7$.

7 . Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

8. Bestäm fourierserien för funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \sin^2 t$ för $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

9. Det har ösregnat under en längre tid. Vatten har helt fyllt ett 100 m långt och 2 m brett dike.
Dikets vertikala genomskärningsprofil har V-form, i form av en halv kvadrat, delad längs en horisontell diagonal, 2 m lång. Regnet har upphört vid tidpunkten $t = 0$.

a) Antag att diket nedtill är helt tätt så att vattnet endast kan försvinna genom avdunstning uppåt.
Låt $V(t)$ vara vattenvolymen vid tiden $t > 0$, med t mätt i dagar.
Visa att $V(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$, $k =$positiv konstant,
om avdunstningshastigheten(i m^3/dag) är proportionell mot den fria vattenytans area.

b) Bestäm $V(t)$ om $V(0) = 100$ m^3 (=helt fyllt dike) och $V(1) = 99$ m^3.

c) När är diket torrlagt? ($\sqrt{99} \approx 9{,}95$).