Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Torsdagen den 8 januari 2009, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

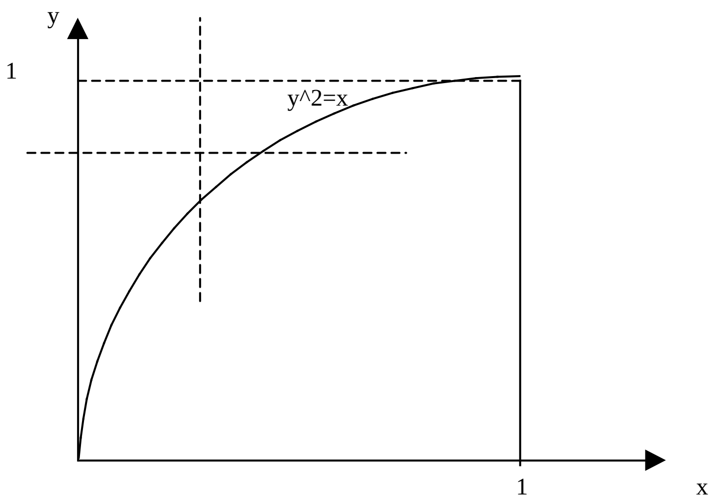
<u>Betygsgränser</u> A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

<u>Betygsgränser</u> 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right\}dx$.

<u>Lösning:</u>

Integranden är svår att integrera med avseende på y.
Däremot går det bra att integrera med avseende på x.
Vi ritar upp området och kastar om integrationsordningen.



Den givna integrationsordningen innebär följande: $\begin{cases} x: & 0 \to 1 \\ y: & \sqrt{x} \to 1 \end{cases}$.

Vi kastar om integrationsordningen.

Då erhålles: $\begin{cases} x: & 0 \to y^2 \\ y: & 0 \to 1 \end{cases}$.

Dubbelintegralen blir då

$$\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right\}dx = \int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=0}^{y^2} e^{x/y}\,dx\right\}dy = \int_{y=0}^{1}\left[ye^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} dy$$

$$\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right\}dx = \int_{y=0}^{1}(ye^{y}-y)\,dy = \left[ye^{y}-e^{y}-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

SVAR: Dubbelintegralen blir $\frac{1}{2}$.

2. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

<u>Lösning:</u>

Volymen erhålles som $V = \iiint_V dxdydz$.

Integrera först i z-led. $V = \iiint_V dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$.

Bestäm området D_{xy} . Skärningskurvan mellan paraboloiden och xy-planet är $x^2 + y^2 = 4$.

Integrationsområdet $D_{xy} = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\right\}$. Inför polära koordinater.

$$V = \iint_{D_{rv}} \left(4 - r^2\right) r dr dv = 2\pi \int_{r=0}^{2} (4r - r^3) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2} = 8\pi .$$

SVAR: Den sökta volymen $V = 8\pi$.

3. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$, där vektorfältet $\mathbf{u} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$, S är den slutna yta som begränsar halvklotet $\left\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\right\}$ och $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S.

<u>Lösning:</u>
Den sökta flödesintegralen kan beräknas direkt eller ännu bättre genom att använda divergenssatsen.
Villkoren för divergenssatsen är uppfyllda.
Först beräknas divergensen för vektorfältet.

$$div\,\mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^3 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 .$$

Divergenssatsen $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K div\,\mathbf{u}\, dxdydz$ ger: $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_K 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$.

Här är K området innanför den slutna ytan S.
Eftersom området är ett halvklot passar sfäriskt polära koordinater bra för att beskriva detta.

Området ges då av $K_{r\theta\varphi} = \left\{ (r, \theta, \varphi): 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \varphi < 2\pi \right\}$.

Volymselementet ges i sfäriskt polära koordinater av $r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$.

Flödesintegralen blir då $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_{K_{r\theta\varphi}} 3r^2 r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$.

Trippelintegralen kan uppdelas i tre enkelintegraler: $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_{r=0}^{R} 3r^2 r^2 dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{3R^5}{5} \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{6\pi R^5}{5}$.

SVAR: Flödesintegralen blir $\iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{6\pi R^5}{5}$.

4. I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras är beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden. Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation. Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning.
<u>Lösning:</u>

Den sökta modellen blir: $\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$, där $P \ge 0$.

Inför de givna värdena på konstanterna $k_1 = 3$ och $k_2 = 1$: $\frac{dP}{dt} = 3P - P^2 = P(3 - P)$.

Vi bestämmer först de stationära lösningarna och analyserar därefter lösningarnas uppförande för olika startvärden.
Vi är intresserade av långtidsbeteendet.

De stationära lösningarna ges av: $P_1 = 0$ och $P_2 = 3$.

Vi erhåller: $\begin{cases} P > 3 & \dfrac{dP}{dt} < 0 \quad P(t) \text{ är avtagande} \\ 0 < P < 3 & \dfrac{dP}{dt} > 0 \quad P(t) \text{ är växande.} \end{cases}$

Detta innebär att vi erhåller ett stabilt jämviktsläge $P = 3$.
Efter lång tid kommer befolkningsmängden att vara lika med 3.

SVAR: Den sökta modellen ges av: $\dfrac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$, där $P \geq 0$ och $\lim_{t\to\infty} P(t) = 3$.

5. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 9$, $1 \leq t \leq 2$ och noll för övrigt vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 9Y(s) = F(s)$.

Insättning av begynnelsevillkoren ger $Y(s) = \dfrac{3}{s^2+9} + \dfrac{F(s)}{s^2+9}$.

För bestämning av högerledets Laplacetransform använder vi dess definition.(Heaviside går också bra.)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_1^2 9e^{-st}dt = \frac{9(e^{-s} - e^{-2s})}{s}.$$

Den sökta lösningens Laplacetransform är $Y(s) = \dfrac{3}{s^2+9} + \dfrac{9(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s^2+9)} = \dfrac{3}{s^2+9} + (e^{-s} - e^{-2s})(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+9})$.

Återtransformering ger oss vår sökta lösning: $y(t) = \sin 3t + U(t-1)(1-\cos 3(t-1)) - U(t-2)(1-\cos 3(t-2))$.

Här är $U(t-a)$ Heavisidefunktionen.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = \sin 3t + U(t-1)(1-\cos 3(t-1)) - U(t-2)(1-\cos 3(t-2))$.

6. Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5-x-y) \\ y(-2+x) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

Lösning:

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi erhåller följande system $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5-x-y) \\ y(-2+x) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x,y)$.

Detta har lösningarna $(0,0)$, $(5,0)$ och $(2,3)$.

För att klassificera dessa punkter använder vi oss av Jacobimatrisen i den aktuella punkten.

Jacobimatrisen är lika med $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 5-2x-y & -x \\ y & -2+x \end{pmatrix}$.

Vi sätter in de tre kritiska punkterna och erhåller därvid följande matriser.

$\underline{(0,0)}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

$\underline{(5,0)}$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

$\underline{(2,3)}$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Vi tecknar egenvärdena: $0 = \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = (\lambda+1)^2 + 5$.

Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{5}$. Den kritiska punkten är en stabil spiralpunkt.
Det linjära respektive det icke-linjära systemet uppför sig på samma sätt i dessa fall.
SVAR: Kritiska punkter: $(0,0)$ och $(5,0)$ är sadelpunkter och instabila, $(2,3)$ är en stabil spiralpunkt.

7. a) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$.
Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$.
b) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + P(x)y = 4x \quad , y(0) = 3$,

där $P(x) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Lösning:
a) Vi ansätter $y = y_1(x)z(x)$ och sätter in i den inhomogena differentialekvationen.
Vi får $y_1'(x)z(x) + y_1(x)z'(x) + P(x)y_1(x)z(x) = f(x)$, $y_1(x)z'(x) + (y_1'(x) + P(x)y_1(x))z(x) = f(x)$.
$y = y_1(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$ vilket leder till att $y_1(x)z'(x) = f(x)$.

Vi får $z'(x) = \dfrac{f(x)}{y_1(x)}$. Integrera med avseende på x : $z(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx + A$.

Den allmänna lösningen ges av $y = y_1(x)z(x) = y_1(x)(\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx + A) = Ay_1(x) + y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$.

En partikulärlösning ges av $y_p = y_1(x)\displaystyle\int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx$.

b) Differentialekvationen är linjär av första ordningen och den löses med hjälp av integrerande faktor.

Vi skriver först om differentialekvationen: $\begin{cases} y' + 2y = 4x \ , & 0 \le x \le 1 \\ y' - \dfrac{2}{x}y = 4x \ , & x > 1 \end{cases}$.

Multiplicera med integrerande faktor, vilken ges av $\begin{cases} e^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Vi får $\begin{cases} y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 4xe^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ y'\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{1}{x^2}y = 4x\dfrac{1}{x^2} \ , & x > 1 \end{cases}$ eller $\begin{cases} (ye^{2x})' = 4xe^{2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ (y\dfrac{1}{x^2})' = 4\dfrac{1}{x} \ , & x > 1 \end{cases}$.

Integrera med avseende på x: $\begin{cases} ye^{2x} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1 \ , & 0 \le x \le 1 \\ y\dfrac{1}{x^2} = 4\ln x + C_2 \ , & x > 1 \end{cases}$.

Villkoret $y(0) = 3$ ger tillsammans med ekvationen $ye^{2x} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1$ att $C_1 = 4$.

Insättning ger: $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{-2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ y\dfrac{1}{x^2} = 4\ln x + C_2 \ , & x > 1 \end{cases}$. Det återstår att bestämma konstanten C_2.

Kontinuerlig lösning söktes och kontinuitetsvillkoret ger: $2x - 1 + 4e^{-2x}\,|_{x=1} = x^2(4\ln x + C_2)|_{x=1}$.

Konstanten blir $C_2 = 1 + 4e^{-2}$ och den sökta lösningen blir $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{-2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ y = x^2(4\ln x + 1 + 4e^{-2}) \ , & x > 1 \end{cases}$

SVAR: a) Se ovan.
b) Den sökta lösningen är $\begin{cases} y = 2x - 1 + 4e^{-2x} \ , & 0 \le x \le 1 \\ y = x^2(4\ln x + 1 + 4e^{-2}) \ , & x > 1 \end{cases}$.

8. Bestäm alla lösningar på formen $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ till differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$,
i de fall där "r-ekvationen" har lösningar på formen Cr^p, p en reell konstant.
Lösning:

Vi använder variabelseparationsmetoden. Sätt: $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0$.

Multiplicera med $\frac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$: $\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0$.

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \text{konstant} = \lambda .$$

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

Vi behandlar de tre fallen: $\lambda > 0 \quad ,\lambda = 0$ resp $\lambda < 0$.

$\underline{\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - \mu^2R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \mu^2\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

Vi bestämmer först lösningar till "r-ekvationen". Sätt: $R(r) = r^p$.

Insättning ger: $r^2p(p-1)r^{p-2} + rpr^{p-1} - \mu^2r^p = 0$, $(p^2 - \mu^2)r^p = 0$, $p = \pm\mu$.

Systemets lösningar blir: $\begin{cases} R(r) = A_1r^{\mu} + B_1r^{-\mu} \\ \Theta(\theta) = C_1\cos\mu\theta + D_1\sin\mu\theta \end{cases}$.

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) = (A_1r^{\mu} + B_1r^{-\mu})(C_1\cos\mu\theta + D_1\sin\mu\theta).$$

$\underline{\lambda = 0}$

$$\begin{cases} rR''(r) + R'(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) = 0 \end{cases}.$$

Vi löser "r-ekvationen": $(rR'(r))' = 0$, $rR'(r) = A$, $R'(r) = \frac{A}{r}$, $R(r) = A\ln r + B$.

Den erhållna lösningen är ej på önskad form.

$\underline{\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \mu^2R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) - \mu^2\Theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

Vi bestämmer först lösningar till "r-ekvationen". Sätt: $R(r) = r^p$.

Insättning ger: $r^2p(p-1)r^{p-2} + rpr^{p-1} + \mu^2r^p = 0$, $(p^2 + \mu^2)r^p = 0$, $p = \pm i\mu$.

Ger inget bidrag till lösningarna, ty p skall var reellt.

SVAR: De sökta lösningarna är på formen $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) = (A_1r^{\mu} + B_1r^{-\mu})(C_1\cos\mu\theta + D_1\sin\mu\theta)$.

Även linjärkombinationer av dessa lösningar är lösning till den givna differentialekvationen.

9. Kreatinin är en restprodukt vid ämnesomsättningen i muskelvävnader. Kroppen gör sig av med produkten genom utsöndring i urinen. Redan vid en liten nedsättning av njurfunktionen höjs halten av kreatinin patologiskt. Man planerar att göra försök med hundar på vilka man tänker injicera en större dos kreatinin. Dosen väljs så stor att vävnadernas nyproduktion av ämnet kan försummas jämfört med den injicerade dosen. För att få en bild av hur utsöndringen beror av njurfunktionen tänker man sig nu, att blod och muskelvävnader är två kärl, mellan vilka kreatininet kan diffundera. Från blodet diffunderar ämnet dessutom ut i urinen via njurarna med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen av kreatinin i blodet. Antag att diffusionshastigheten är proportionell mot skillnaden i koncentrationen av kreatininet i respektive kärl. Låt $c_b(t)$ och $c_m(t)$ vara koncentrationerna i blod respektive muskler som funktioner av tiden samt låt k och l vara diffusionskoefficienterna mellan blod/muskler respektive blod/urin.
Ställ upp motsvarande matematiska modell.

Visa att denna har lösningen $\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix} = A_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + A_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}$, där A_1, A_2, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v}_2$, λ_1 och λ_2 är *reella*.

Ange också λ_1 och λ_2 som funktioner av k och l samt visa att de är *olika* och negativa.

Lösning:

Vi erhåller följande matematiska modell: $\begin{cases} c_m' = k(c_b - c_m) \\ c_b' = -k(c_b - c_m) - lc_b \end{cases}$.

Vi skriver om systemet på matrisform: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k-l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k-l \end{pmatrix}$.

$$0 = \begin{vmatrix} -k-\lambda & k \\ k & -k-l-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2k+l)\lambda + kl = (\lambda + k + \frac{l}{2})^2 - k^2 - (\frac{l}{2})^2 .$$

$$\lambda_{1,2} = -k - \frac{l}{2} \pm \sqrt{k^2 + (\frac{l}{2})^2} .$$

Vi har erhållit två reella och skilda egenvärden. Då kan två reella egenvektorer erhållas.
Detta innebär att lösningen har den sökta formen.
Det återstår att visa att bägge egenvärdena är negativa.

Fallet $\lambda_1 = -k - \frac{l}{2} + \sqrt{k^2 + (\frac{l}{2})^2}$ är klart enligt triangelolikheten, $\lambda_1 = -k - \frac{l}{2} + \sqrt{k^2 + (\frac{l}{2})^2} \leq -k - \frac{l}{2} + k + \frac{l}{2} = 0$ med likhet endast om $k = l = 0$.

Fallet $\lambda_2 = -k - \frac{l}{2} - \sqrt{k^2 + (\frac{l}{2})^2}$ är trivialklart.

SVAR: Den matematiska modellen är $\begin{cases} c_m' = k(c_b - c_m) \\ c_b' = -k(c_b - c_m) - lc_b \end{cases}$.

Egenvärdena är $\lambda_{1,2} = -k - \frac{l}{2} \pm \sqrt{k^2 + (\frac{l}{2})^2}$,