

### Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Torsdagen den 8 januari 2009, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen 
$$\int_{x=0}^1 \int_{y=\sqrt{x}}^1 e^{x/y} dy dx .$$

2. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden  $z = 4 - x^2 - y^2$  och xy-planet.

3. Beräkna flödesintegralen  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$ , där vektorfältet  $\mathbf{u} = (x^3, y^3, z^3)$ ,  $S$  är den slutna yta som begränsar halvklotet

$$\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\} \text{ och } \hat{\mathbf{n}} \text{ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan } S.$$

4. I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden,  $P(t)$ , förändras är beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.

Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden. Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation. Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning.

5. Lös differentialekvationen  $y'' + 9y = f(t)$ , där  $f(t) = 9 - t^2$  och noll för övrigt vidare skall begynnelsevillkoren  $y(0) = 0$  och  $y'(0) = 3$  vara uppfyllda.

6. Bestäm alla kritiska punkter till systemet 
$$\begin{cases} x' = x(5 - x - y) \\ y' = y(-2 + x) \end{cases} .$$

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

7. a) Låt  $y = y_1(x)$  vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen  $y'' + P(x)y = 0$ .

Härled en partikulärlösning till differentialekvationen  $y'' + P(x)y = f(x)$ .

b) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet  $y'' + P(x)y = 4x$ ,  $y(0) = 3$ ,

där 
$$P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases} .$$

8. Bestäm alla lösningar på formen  $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$  till differentialekvationen 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 ,$$

i de fall där "r-ekvationen" har lösningar på formen  $Cr^p$ ,  $p$  en reell konstant.

9. Kreatinin är en restprodukt vid ämnesomsättningen i muskelvävnader. Kroppen gör sig av med produkten genom utsöndring i urinen. Redan vid en liten nedsättning av njurfunktionen höjs halten av kreatinin patologiskt. Man planerar att göra försök med hundar på vilka man tänker injicera en större dos kreatinin. Dosen väljs så stor att vävnadernas nyproduktion av ämnet kan försummas jämfört med den injicerade dosen. För att få en bild av hur utsöndringen beror av njurfunktionen tänker man sig nu, att blod och muskelvävnader är två kärl, mellan vilka kreatininet kan diffundera. Från blodet diffunderar ämnet dessutom ut i urinen via njurarna med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen av kreatinin i blodet. Antag att diffusionshastigheten är proportionell mot skillnaden i koncentrationen av kreatininet i respektive kärl. Låt  $c_b(t)$  och  $c_m(t)$  vara koncentrationerna i blod respektive muskler som funktioner av tiden samt låt  $k$  och  $l$  vara diffusionskoefficienterna mellan blod/muskler respektive blod/urin. Ställ upp motsvarande matematiska modell.

Visa att denna har lösningen 
$$\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix} = A_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} , \text{ där } A_1, A_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \lambda_1 \text{ och } \lambda_2 \text{ är reella.}$$

Ange också  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$  som funktioner av  $k$  och  $l$  samt visa att de är *olika* och negativa.