KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 18 augusti 2009, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

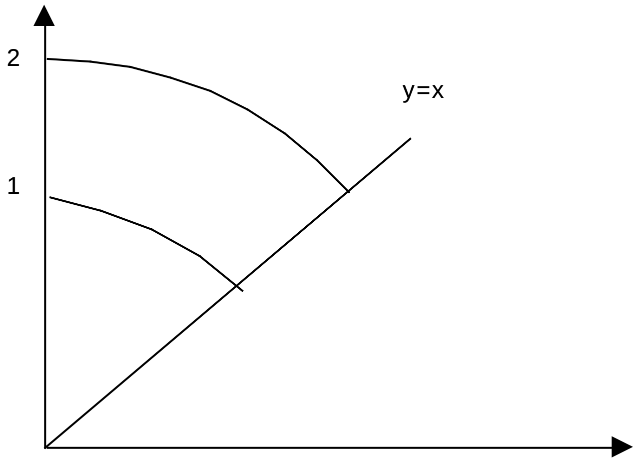
Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna tröghetsmomentet med avseende på z -axeln för området $D=\left\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4\ ,\ y\ge x\ge 0\ \right\}$, dvs beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2+y^2)dxdy.$

Lösning:

Inför polära koordinater.

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\iint_{D_{rv}} r^2 r dr dv \quad \text{där } D_{rv}=\left\{(r,v):\ 1\le r\le 2\ ,\ \frac{\pi}{4}\le v\le \frac{\pi}{2}\right\}$$



$$I=\iint_{D_{rv}} r^3 drdv=\int_{r=1}^{2} r^3 dr \int_{v=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dv=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right)=\frac{15\pi}{16}$$

SVAR: Tröghetsmomentet $I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\dfrac{15\pi}{16}$.

2. Beräkna $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}dxdydz$, där $V=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le r^2\right\}$.

Ledning: Uppskatta integranden.

Lösning:

I området V är tex $-r\le x\le r$, $-r\le y\le r$, $-r\le z\le r$ och således $-3r\le x+y+z\le 3r$.

Vi får $\dfrac{1}{r^3}\iiint_V e^{(-3r)^3}dxdydz\le \dfrac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}dxdydz\le \dfrac{1}{r^3}\iiint_V e^{(3r)^3}dxdydz$.

Integranderna i ytterleden är konstanter med avseende på integrationen.

Då blir integralerna i ytterleden respektive konstant gånger klotets volym.

$$\frac{1}{r^3}e^{(-3r)^3}\frac{4\pi}{3}r^3\le \frac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}dxdydz\le \frac{1}{r^3}e^{(3r)^3}\frac{4\pi}{3}r^3$$

$$e^{-27r^3}\frac{4\pi}{3} \le \frac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}\,dxdydz \le e^{27r^3}\frac{4\pi}{3}$$

Eftersom ytterleden har gränsvärdena $\frac{4\pi}{3}$ får det sökta gränsvärdet samma värde.

SVAR: $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}\,dxdydz = \frac{4\pi}{3}$.

3. Bestäm konstanten a så att vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(\frac{a}{1+2x+y^2},\ \frac{2y}{1+2x+y^2}\right)$$

får en potential U samt beräkna denna.

Ange därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ med det beräknade värdet på konstanten a, där C är kurvan $y = x^2 - x$ från (0,0) till (2,2).

<u>Lösning:</u>

Betrakta ett område där singulära punkter saknas. Vi betraktar det övre halvplanet.

För att erhålla en potential U skall följande villkor vara uppfyllt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{a}{1+2x+y^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2y}{1+2x+y^2}\right\}$$

Detta ger:

$$\frac{-a2y}{(1+2x+y^2)^2} = \frac{-2\cdot 2y}{(1+2x+y^2)^2}$$

Det ger oss att $a = 2$.

För en potential U gäller att $dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dvs

$$dU = U'_x dx + U'_y dy = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Vi får i vårt fall följande system av partiella differentialekvationer.

$$\begin{cases} U'_x = \dfrac{2}{1+2x+y^2} & U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + g(y) \\ \\ U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} & U'_y = \dfrac{2y}{1+2x+y^2} + g'(y) \end{cases}$$

Identifiering ger $g'(y) = 0$, $g(y) = C$.

Den sökta potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$.

Vid beräkning av linjeintegralen utnyttjar vi potentialen.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C dU = U(2,2) - U(0.0) = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9 = 2\ln 3$$

SVAR: Konstanten $a = 2$. Potentialen är $U(x,y) = \ln\left|1+2x+y^2\right| + C$. Linjeintegralen är $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\ln 3$.

4. Funktionen $x(t)$ uppfyller $x' = x(2-x)(4-x)$, $x(0) = x_0$.

Undersök om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existerar samt beräkna detta för varje initialvärde x_0.

<u>Lösning</u>:

Vi bestämmer först de kritiska punkterna. Där är derivatan lika med noll.

De stationära(kritiska) punkterna är $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 4$.

En teckenstudie av derivatan ger information rörande funktionens utseende.

$x > 4$: $x' > 0$ $\quad x$ växer.

$2 < x < 4$: $x' < 0$ $\quad x$ avtar.
$0 < x < 2$: $x' > 0$ $\quad x$ växer.
$x < 0$: $x' < 0$ $\quad x$ avtar.
Gränsvärdet existerar för varje initialvärde x_0 mellan 0 och 4.
Vi erhåller följande gränsvärden:
$0 < x_0 < 4$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 2$, $x_0 = 4$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 4$ och $x_0 = 0$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

SVAR: Gränsvärdet existerar enligt följande:
$0 < x_0 < 4$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 2$, $x_0 = 4$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 4$ och $x_0 = 0$: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

5. Låt T vara temperaturen hos en kaka och T_0 vara rummets temperatur. Antag att Newtons avsvalningslag gäller dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen, $T - T_0$. Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C. Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C. Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter.
<u>Lösning:</u>
Enligt Newtons avsvalningslag gäller: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ vilken har lösningen $T - T_0 = Ce^{kt}$.
Bestäm integrationskonstanten C samt proportionalitetskonstanten k.

$$\begin{cases} T(0) = 220 & 220 - 20 = C \\ T(5) = 120 & 120 - 20 = Ce^{k5} \end{cases} \quad \begin{cases} C = 200 \\ e^{k5} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad k = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{2} \quad T = 20 + 200e^{-t\frac{1}{5}\ln 2} = 20 + 200(2)^{-\frac{t}{5}}$$

Efter 20 minuter är temperaturen $T(20) = 20 + 200(2)^{-\frac{20}{5}} = 20 + \frac{25}{2} = 32.5$.

SVAR: Kakans temperatur är efter 20 minuter 32.5 °C.

6. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\,d\tau$.

<u>Lösning</u>:
Laplacetransformera ekvationen: $F(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s+1}F(s)$. Lös ut $F(s)$: $F(s) = \frac{s}{s^2+9}\frac{s+1}{s} = \frac{s+1}{s^2+9}$.

Omforma före återtransformation: $F(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$.
Återtransformera: $f(t) = \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.
SVAR: Den sökta funktionen ges av $f(t) = \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.

7. Definiera begreppet fundamental lösningsmängd. Bestäm en fundamental lösningsmängd till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0$. Bestäm även allmänna lösningen till differentialekvationen
$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
<u>Lösning</u>:
En fundamental lösningsmängd till en linjär differentialekvation av ordning n består av n linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen.
Den karakteristiska ekvationen till $y'' + 3y' + 2y = 0$ är $r^2 + 3r + 2 = 0$, $(r+1)(r+2) = 0$.

Rötterna är $r_1=-1$ och $r_2=-2$. Lösningar är e^{-x} respektive e^{-2x}. Vi visar att de är linjärt oberoende genom att visa att Wronskianen är skilt från noll. $W(e^{-x},\ e^{-2x})=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=-e^{-3x}\neq 0$.

En fundamental lösningsmängd är $\left\{\ e^{-x},\ e^{-2x}\right\}$.

Nu över till den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$.

Den allmänna lösningen ges av allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.
Här utnyttjar vi att en fundamental lösningsmängd är bestämd.
Allmänna homogena lösningen spänns upp av $\left\{\ e^{-x},\ e^{-2x}\right\}$. Vi har $y_h=Ae^{-x}+Be^{-2x}$.

För att bestämma en partikulärlösning använder vi variation av parameter.
Ansätt $y_p=u(x)e^{-x}+v(x)e^{-2x}$.

Metoden variation av parameter ger oss följande system: $\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+e^x}\end{pmatrix}$.

Vi löser systemet med hjälp av Cramer´s regel.

$$\begin{cases} u'=\dfrac{1}{-e^{-3x}}\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix}=\dfrac{e^x}{1+e^x} \\ v'=\dfrac{1}{-e^{-3x}}\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{1}{1+e^x}\end{vmatrix}=-\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}=-\left(e^x-\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)\end{cases}$$

Integrera map x: $\begin{cases} u=\ln(1+e^x) \\ v=-\left(e^x-\ln(1+e^x)\right)\end{cases}$.

Partikulärlösningen blir $y_p=e^{-x}\ln(1+e^x)-\left(e^x-\ln(1+e^x)\right)e^{-2x}$.

Den allmänna lösningen är $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}+e^{-x}\ln(1+e^x)-\left(e^x-\ln(1+e^x)\right)e^{-2x}$,

vilket efter förenkling blir $y=Ce^{-x}+Be^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)$.

SVAR: En fundamental lösningsmängd till en linjär differentialekvation av ordning n består av n linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen. En fundamental lösningsmängd är $\left\{\ e^{-x},\ e^{-2x}\right\}$.

Den allmänna lösningen $y=Ce^{-x}+Be^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)$.

8. Skriv $x''+x=\left(\dfrac{1}{2}-3(x')^2\right)x'-x^2$ som ett plant autonomt system.

Bestäm systemets kritiska punkter och avgör deras karaktär, dvs stabilitet/instabilitet och typ.
Lösning:
Inför en ny variabel y genom $y=x'$.

Den givna differentialekvationen övergår då i systemet $\begin{cases} x'=y \\ y'=x''=-x+\left(\dfrac{1}{2}-3y^2\right)y-x^2\end{cases}$.

Skrivet på matrisform: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y - x^2 \end{pmatrix}$.

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi får då $\begin{pmatrix} y \\ -x + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi erhåller följande kritiska punkter (0, 0) och (-1,0).

Vi studerar nu det linjariserade systemet.
Först beräknas Jacobimatrisen och sätter därefter in respektive stationära(kritiska) punkt.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2x & \frac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$.

Den kritiska punkten (0, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Komplexa egenvärden med positiv realdel innebär att den kritiska punkten är en instabil spiralpunkt.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Den kritiska punkten (-1, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: (0,0) är en instabil spiralpunkt. (-1,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.

9.a) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.
9.b) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.
9.c) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

Lösning:

a) Vi visar att den inre produkten mellan två godtyckliga funktioner i den givna mängden är lika med noll på det givna intervallet.

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx)\big)dx = \{n \neq m\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi = 0 .$$

b) Här gäller det att beskriva $f(x) = \sin^3 x$ med hjälp av den givna funktionsföljden.

En väg att göra detta är att ansätta $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, multiplicera med $\sin mx$ och integrera över intervallet $[0,\pi]$.

En betydligt kortare väg är att utnyttja formeln $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Den sökta linjärkombinationen blir: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Respektive serie kommer att konvergera mot $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$.

I fallet med Fourierserien blir detta: $\frac{0^2+1+3^2+1}{2} = \frac{11}{2}$.

I fallet med cosinusserien blir detta: $\frac{0^2+1+0^2+1}{2} = 1$.

I fallet med sinusserien blir detta: $\frac{0^2+1-(0^2+1)}{2} = 0$.

SVAR: a) Se ovan. b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. c) $\frac{11}{2}$, 1 respektive 0.

Nedan följer plottar på de tre fallen.