KTH Matematik

**Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).**

Tisdagen den 18 augusti 2009, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna tröghetsmomentet med avseende på $z$ -axeln för området $D=\left\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4\ ,\ y\ge x\ge 0\right\}$, dvs beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$.

2. Beräkna $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}\iiint_V e^{(x+y+z)^3}dxdydz$ , där $V=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le r^2\right\}$.

   Ledning: Uppskatta integranden.

3. Bestäm konstanten $a$ så att vektorfältet

$$\mathbf{F}=\left(\frac{a}{1+2x+y^2},\ \frac{2y}{1+2x+y^2}\right)$$

får en potential $U$ samt beräkna denna.

Ange därefter värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ med det beräknade värdet på konstanten $a$, där $C$ är kurvan $y=x^2-x$ från (0,0) till (2,2).

4. Funktionen $x(t)$ uppfyller $x'=x(2-x)(4-x)$ , $x(0)=x_0$ .

Undersök om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty}x(t)$ existerar samt beräkna detta för varje initialvärde $x_0$.

5. Låt $T$ vara temperaturen hos en kaka och $T_0$ vara rummets temperatur. Antag att Newtons avsvalningslag gäller dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen, $T-T_0$. Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C. Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C. Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter.

6. Bestäm en funktion $f$ som satisfierar ekvationen $f(t)=\cos 3t+\int_0^t e^{-\tau}f(t-\tau)\,d\tau$ .

7. Definiera begreppet fundamental lösningsmängd. Bestäm en fundamental lösningsmängd till differentialekvationen $y''+3y'+2y=0$ .

Bestäm även allmänna lösningen till differentialekvationen $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}$ .

8. Skriv $x''+x=\left(\frac{1}{2}-3(x')^2\right)x'-x^2$ som ett plant autonomt system.

Bestäm systemets kritiska punkter och avgör deras karaktär, dvs stabilitet/instabilitet och typ.

9.a) Visa att $\{\sin nx\}$ , $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.

9.b) Skriv funktionen $f(x)=\sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

9.c) Antag att funktionen $f(x)=x^2+1$ , $0<x<3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x=0$.