Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 12 januari 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.
Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.
Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna $\iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$, där $D_{xy} = \left\{ (x,y) :\ x^2+y^2 \le 4 ,\ x \ge 0,\ \ y \ge 0 \right\}$.

Lösning:
Inför polära koordinater:

$$\iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy = \iint_{D_{rv}} \sqrt{4r^2+1}\,r\,drdv = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_{r=0}^{2} = \frac{\pi}{24}(17\sqrt{17}-1) .$$

SVAR: $\iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy = \frac{\pi}{24}(17\sqrt{17}-1)$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C (x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3)dx+(x+xe^{xy})dy$,

där C är halvcirkelbågen $x^2+y^2=1$, $y \ge 0$ från punkten (1,0) till punkten (-1,0).

Lösning:
Vi sluter den givna kurva med en rät linje, L, från punkten (-1,0) till punkten (1,0).
Då erhålles en sluten kurva i positiv riktning och vektorfältet är kontinuerligt.
Vi använder Green´s formel och överför linjeintegralen till en dubbelintegral
över det inneslutna området, D.

$$\int_{C\ L} (x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3)dx+(x+xe^{xy})dy = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x+xe^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3) \right\} dxdy$$

$$\int_C (x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3)dx+(x+xe^{xy})dy + \int_{x=-1}^{1} 3dx = \iint_D \left\{1-x^2-y^2\right\} dxdy$$

Vi inför polära koordinater i dubbelintegralen.

$$\int_C (x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3)dx+(x+xe^{xy})dy = -6 + \iint_{D_{rv}} \left\{1-r^2\right\} r\,drdv$$

Gränserna är $r:\ \ 0 \to 1$, $v:\ 0 \to \pi$.

$$\int_C (x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}+3)dx+(x+xe^{xy})dy = -6+\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = -6+\frac{\pi}{4}$$

SVAR: Den sökta linjeintegralen blir $-6+\frac{\pi}{4}$

3. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} \cos 2u\ \ (t-u)^2\ \ e^{-3t} du \right\} dt$.

Lösning:

Integralen kan omformas till följande dubbelintegral: $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-3t} \int_{u=0}^{t} \cos 2u\ \ (t-u)^2 du \right\} dt$.

Den inre integralen är en faltningsintegral.
Den sökta integralen är Laplacetransformen för faltningen med $s=3$ insatt.

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\{ e^{-st} \int_{u=0}^{t} \cos 2u\ \ (t-u)^2 du \right\} dt = L\{\cos 2t\}\ \ L\{t^2\} = \frac{s}{s^2+4}\ \ \frac{2}{s^3}.$$

Insättning av $s=3$ ger den sökta integralen.

$$\int_{t=0}^{\infty}\left\{\int_{u=0}^{t}\cos 2u\ (t-u)^2\ e^{-3t}\,du\right\}dt = \frac{1}{3^2+4}\ \frac{2}{3^2} = \frac{2}{117}.$$

SVAR: Dubbelintegralen är lika med $\frac{2}{117}$.

4. I en populationsmodell är den <u>relativa</u> tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(T)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.

Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(T)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.

Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.

Studera långtidsbeteendet av $P(t)$ för olika startvärden på populationen.

<u>Lösning:</u>

Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.

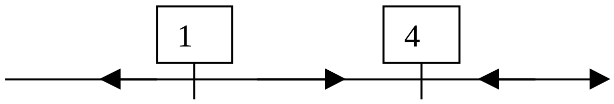
Då erhålles $\frac{dP}{dt} = (5-P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P-1)(4-P)$.

Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.

I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.

Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1,\ P = 4$.

Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen $P_0 : \begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4\ ,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1\ ,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0\ ,\ t \to \infty \end{cases}$.

SVAR: $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4\ ,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1\ ,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0\ ,\ t \to \infty \end{cases}$.

5. Låt $y_1(x) = 5x^2,\ y_2(x) = 3x + 4x^3,\ y_3(x) = x^2 + 7x^3,\ y_4(x) = 2x + x^2$ och $y_5(x) = 2x + 3x^2 + 5x^3$ vara lösningar till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation.

Bestäm den entydiga lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 2,\ y'(1) = 3$ och $y''(1) = 4$.

<u>Lösning:</u>

Det behövs tre linjärt oberoende lösningar för att bestämma den allmänna lösningen till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation. Bland de givna lösningarna väljer vi en lämplig linjärkombination.

Tag $y = ax + bx^2 + cx^3$ till allmän lösning. Konstanterna bestämmes med hjälp av de givna villkoren.

Första- och andraderivatan behövs. $y' = a + 2bx + 3cx^2,\ y'' = 2b + 6cx$.

Insättning ger $\begin{cases} 2 = y(1) = a + b + c \\ 3 = y'(1) = a + 2b + 3c \\ 4 = y''(1) = 2b + 6c \end{cases}$.

Totalmatrisen skrives upp och elementära radoperationer ger oss lösningen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vi har $a = 2,\ b = -1,\ c = 1$. Detta ger oss den sökta lösningen $y = 2x - x^2 + x^3$

SVAR: Differentialekvationens lösning är $y = 2x - x^2 + x^3$.

6. Bestäm $y(5)$ då $y'(t) + \int_0^t e^{2u} y(t-u)du = \delta(t-3)$, $t \geq 0$ och $y(0) = 1$.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformera :

$$sY(s) - y(0) + \frac{1}{s-2} Y(s) = e^{-3s}$$

Insättning av villkoret ger:

$$sY(s) + \frac{1}{s-2} Y(s) = 1 + e^{-3s}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - 2s + 1} + \frac{s-2}{s^2 - 2s + 1} e^{-3s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \right\} e^{-3s}$$

Återtransformering ger:

$$y(t) = e^t - te^t + U(t-3)\left\{e^{t-3} - (t-3)e^{t-3}\right\}$$

Det sökta funktionsvärdet blir

$$y(5) = e^5 - 5e^5 + U(5-3)\left\{e^{5-3} - (5-3)e^{5-3}\right\} = -4e^5 - e^2$$

SVAR: Det sökta funktionsvärdet blir $y(5) = -4e^5 - e^2$.

7. Bestäm värdet på x så att $y(x) = 4$, då $(x-2)y' + y = 2x$ och $y(0) = 3$.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer först den allmänna lösningen och därefter den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = 3$.
Här noteras även lösningens existensintervall.
Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.
Ekvationen kan skrivas på normalformal och en integrerande faktor kan bestämmas.
Observera dock att vänstra ledet är en derivata.
Vi får $((x-2)y)' = 2x$. Integration med avseende på x ger: $(x-2)y = x^2 + C$
Integrationskonstanten bestämmes: $y(0) = 3$ ger $(0-2)3 = C$, $C = -6$.

Den lösning som uppfyller differentialekvationen och begynnelsevillkoret är $y = \dfrac{x^2 - 6}{x - 2}$.

Här är $x \neq 2$ och lösningens existensintervall ät $\{x \ : \ x < 2\}$.
Vi bestämmer nu x så att $y(x) = 4$.

$$4 = \frac{x^2 - 6}{x - 2} \ , \ x^2 - 6 - 4x + 8 = 0 \quad , x^2 - 4x + 2 = 0$$

Kvadratkomplettera: $(x-2)^2 = 2 \quad , x = 2 \pm \sqrt{2}$.
Här är endast ett x-värde aktuellt.
Det x-värde som ligger i lösningens existensintervall är $x = 2 - \sqrt{2}$.

SVAR: Det entydiga värdet på x ges av $x = 2 - \sqrt{2}$.

8. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller

randvillkoren $y(0)=0$ och $y'(L)=0$. Visa att de erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0,L]$.

<u>Lösning:</u>

λ är större än noll gör att vi kan sätta $\lambda = \mu^2$ där $\mu \in R$.

Insättning i differentialekvationen ger $y'' + \mu^2 y = 0$. De karakteristiska rötterna är $r = \pm i\mu$.

Lösningarna är på formen $y = A\cos\mu x + B\sin\mu x$.

Vi utnyttjar de givna randvillkoren. Då behövs även $y' = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x$.

Randvillkoren ger oss följande system: $\begin{cases} y(0)=0=A \\ y'(L)=0=-\mu A\sin\mu L+\mu B\cos\mu L \end{cases}$.

Icke-triviala lösningarna erhålles då $\cos\mu L = 0$, dvs då $\mu L = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1,2,.....$.

De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,....$.

Nu visar vi ortogonaliteten.

Vi visar att inre produkten $\displaystyle\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

Vi omformar vänstra ledet. $VL = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L \left\{\cos\frac{(2n-2m)\pi x}{2L} - \cos\frac{(2n+2m-2)\pi x}{2L}\right\}dx$

Integration ger: $VL = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{2L}{(2n-2m)\pi}\sin\dfrac{(2n-2m)\pi x}{2L} + \dfrac{2L}{(2n-2m-2)\pi}\sin\dfrac{(2n-2m-2)\pi x}{2L}\right]_0^L = 0$

Vi har erhållit $\displaystyle\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

SVAR: De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,....$.

9. Bestäm en lösning till problemet $\begin{cases} u_{xx} = t u_t \ , & 0 \le x \le \pi \ , \ t \ge 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \ t \ge 1 \\ u(x,1) = 4\sin^3 x \ , & 0 \le x \le \pi \ . \end{cases}$

<u>Lösning:</u>

Då $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ enligt BETA , kan problemet skrivas

$$\begin{cases} u_{xx} = t u_t \ , \quad 0 \le x \le \pi \ , \ t \ge 1 & (1) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t \ge 1 & (2) \\ u(x,1) = 3\sin x - \sin 3x \ , \quad 0 \le x \le \pi & (3) \end{cases}$$

Vi använder separation av variabler och sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$.

(1) ger $X''T = tXT'$ och $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{tT'}{T} = -\lambda$, där λ är en konstant.

Man får dels $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$ och dels $tT' = -\lambda T$ dvs $T' + \dfrac{\lambda}{t}T = 0$.

Problemet för X har lösningarna $X = \sin nx$, $n = 1, 2, 3,$ för $\lambda = n^2$.

För T fås då ekvationen $T' + \dfrac{n^2}{t}T = 0$, som har integrerande faktor $e^{n^2 \ln t} = t^{n^2}$.

Man får $t^{n^2}T' + n^2 t^{n^2-1}T = 0$ och $\dfrac{d}{dt}\left(t^{n^2}T\right) = 0$.

Integration ger $t^{n^2}T = C$ och $T = Ct^{-n^2}$, där C är en konstant.

Härav följer att $u_n = A_n t^{-n^2} \sin nx$, $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. uppfyller (1) och (2). Här är A_n konstanter.

Genom linearitet följer att $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin nx}{t^{n^2}}$ också uppfyller (1) och (2).

Villkoret (3) ger $u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 3\sin x - \sin 3x$, vilket är uppfyllt om $A_1 = 3,\ A_3 = -1$

och alla övriga $A_n = 0$. Härav följer $u(x,t) = 3\frac{\sin x}{t} - \frac{\sin 3x}{t^9}$.

SVAR: $u(x,t) = 3\frac{\sin x}{t} - \frac{\sin 3x}{t^9}$