Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 12 januari 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna $\iint_{D_{xy}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$, där $D_{xy} = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \le 4 , x \ge 0, y \ge 0 \right\}$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C (x^2 y + \frac{y^3}{3} + ye^{xy} + 3)dx + (x + xe^{xy})dy$,

där C är halvcirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$ från punkten (1,0) till punkten (-1,0).

3. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^{t} \cos 2u\,(t-u)^2 \, e^{-3t} du \right\} dt$.

4. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)} \frac{dP(T)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.

Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(T)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.

Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.

Studera långtidsbeteendet av $P(t)$ för olika startvärden på populationen.

5. Låt $y_1(x) = 5x^2$, $y_2(x) = 3x + 4x^3$, $y_3(x) = x^2 + 7x^3$, $y_4(x) = 2x + x^2$ och $y_5(x) = 2x + 3x^2 + 5x^3$ vara lösningar till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation.

Bestäm den entydiga lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$ och $y''(1) = 4$.

6. Bestäm $y(5)$ då $y'(t) + \int_0^t e^{2u} y(t-u)du = \delta(t-3)$, $t \ge 0$ och $y(0) = 1$.

7. Bestäm värdet på x så att $y(x) = 4$, då $(x-2)y' + y = 2x$ och $y(0) = 3$.

8. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(L) = 0$. Visa att de erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0,L]$.

9. Bestäm en lösning till problemet $\begin{cases} u_{xx} = tu_t , & 0 \le x \le \pi , \ t \ge 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 , & t \ge 1 \\ u(x,1) = 4\sin^3 x , & 0 \le x \le \pi . \end{cases}$