KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 17 augusti 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.
Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.
Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ där $D_{xy} = \left\{(x,y): 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ -y \le x \le y\right\}$.

Lösning:

Vi inför polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad dxdy = rdrd\theta$.

Området D_{xy} beskrivs i polära koordinater: $D_{r\theta} = \left\{(r,\theta): 2 \le r \le 3,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Insättning ger: $\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{r\sin\theta}{r}\,rdrd\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left\{ \int_{r=2}^{3} r\sin\theta dr \right\} d\theta$

$$\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{3^2-2^2}{2}\,2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

SVAR: Dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$ ut ur kroppen som definieras av olikheterna $x^2+y^2+z^2 \le 4$ och $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

Lösning:

Flödet ut ur kroppen, K, ges av flödesintegralen över begränsningsytan, S.

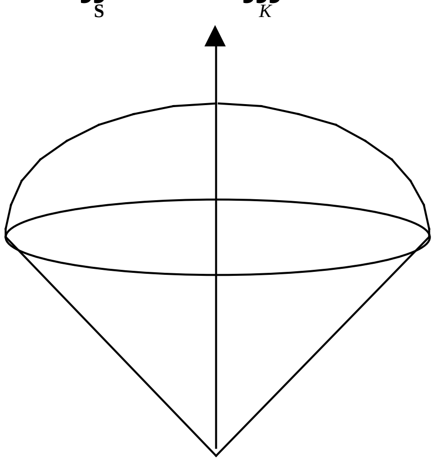
Flödet $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathbf{d}\sigma$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S.

Vi använder divergenssatsen och har då sambandet $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathbf{d}\sigma = \iiint_K div\mathbf{F}\ dxdydz$.

Vi beräknar divergensen av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$

och den ges av $div\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}y^3 + \frac{\partial}{\partial z}z^3 = 3x^2+3y^2+3z^2$.

Flöde $\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathbf{d}\sigma = \iiint_K 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$



Vi beskriver kroppen K med sfäriskt polära koordinater.

$K_{r\theta\varphi} = \left\{(r,\theta,\varphi): 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi < 2\pi\right\}$.

Flödet $\Phi = \iiint_{K_{r\theta\varphi}} 3r^2r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

$$\Phi = 3\ 2\pi\ \frac{2^5}{5}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+1\right) = \frac{96\pi}{5}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

SVAR Utflödet är $\Phi = \dfrac{96\pi}{5}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

3. Beräkna linjeintegralen $\int\limits_C \pi dx + xdy$, där C ges av $\left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0,\ \ x: R \to -R\right\}$.

Bestäm även linjeintegralens minsta värde.

Lösning:

Vi sluter den givna kurva med en rät linje, L, från punkten (-R,0) till punkten (R,0).
Då erhålles en sluten kurva i positiv riktning och vektorfältet är kontinuerligt.
Vi använder Green´s formel och överför linjeintegralen till en dubbelintegral
över det inneslutna området, D.

$$\int\limits_{C\ L} \pi dx + xdy = \iint\limits_{\substack{D\\R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(\pi)\right\} dxdy$$

$$\int\limits_C \pi dx + xdy + \int\limits_{x=-R} \pi dx = \iint\limits_D dxdy$$

Dubbelintegralen ges av det inneslutna områdets area, dvs halvcirkelns area.

$$\int\limits_C \pi dx + xdy = -\pi 2R + \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(R^2 - 4R\right)$$

För att erhålla linjeintegralens minsta värde kvadratkompletterar vi uttrycket ovan.

$$\int\limits_C \pi dx + xdy = \frac{\pi}{2}\left\{\left((R-2)^2 - 4\right)\right\}$$

Det minsta värdet erhålles för $R = 2$ och vi får $\left(\int\limits_C \pi dx + xdy\right)_{\min} = -2\pi$.

SVAR: Den sökta linjeintegralen blir $\dfrac{\pi}{2}\left(R^2 - 4R\right)$ och dess minsta värde -2π.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + y = y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Ange därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Vi har en differentialekvation av Bernoulli typ.
Den triviala lösningen, $y \equiv 0$, är ej av intresse i detta fall.
Omforma differentialekvationen genom att multiplicera med y^{-2}.
Då erhålles: $xy^{-2}y' + y^{-1} = \sqrt{x}$.
Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.
Insättning i differentialekvationen ger $-xz' + z = \sqrt{x}$, $xz' - z = -\sqrt{x}$.
Vi har fått en linjär differentialekvation och denna löses med hjälp av en integrerande faktor.
Först skriver vi om differentialekvationen på standardform: $z' - \dfrac{1}{x}z = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Multiplicera med en integrerande faktor, $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \ ,\ \ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}z\right) = -x^{-\frac{3}{2}}$$

Integrera med avseende på x: $\dfrac{z}{x} = 2x^{-\frac{1}{2}} + C$, $z = 2\sqrt{x} + Cx$.

Men $z = y^{-1}$ ger: $y^{-1} = 2\sqrt{x} + Cx$.
Det givna villkoret ger: $1 = 2 + C$, $C = -1$.
Den sökta lösningen är $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x} - x}$.
Lösningens existensintervall skall uppfylla följande villkor :
$x > 0$ och $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) \neq 0$ samt innehålla $x = 1$.
Detta ger oss intervallet $\{x : 0 < x < 4\}$.
SVAR: Differentialekvationens lösning är $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x} - x}$ och dess existensintervall är $\{x : 0 < x < 4\}$.

5. Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.
Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T - 40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T - 30}{3}$.
Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.
Vad är produktens temperatur efter lång tid ?
Lösning:
Eftersom det är en avsvalningsprocess är det endast modell1 som är rimlig, ty i modell 2 kommer temperaturen att växa obegränsat. Derivatan anger temperaturens förändringshastighet.
Differentialekvationerna är linjära av första ordningen.
Lösningen fås som allmän homogen lösning plus en partikulär lösning.
Modell 1:
$$T(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 40$$
Vid $t = 0$ är $T = 700$. Detta ger $A = 660$.
Vi får $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$. Efter lång tid blir produktens temperatur 40 "C.

SVAR: Endast modell 1 är rimlig. Modell 1: $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$.
Produktens temperatur blir 40 "C.

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 9\delta(t - 5)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. Här är $\delta(t - 5)$ Diracs deltafunktion. Bestäm även $y(\pi)$.
Lösning:
Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.
$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = 9e^{-5s}$.
Insättning av begynnelsevillkoren ger: $(s^2 + 4s + 13)Y(s) - 4s - 1 + 4(-4) = 9e^{-5s}$.
Lös ut $Y(s)$:
$$Y(s) = \frac{4s + 17}{s^2 + 4s + 13} + \frac{9e^{-5s}}{s^2 + 4s + 13} = \frac{4(s + 2) + 3\ 3}{(s + 2)^2 + 9} + \frac{9e^{-5s}}{(s + 2)^2 + 9}$$
Återtransformera: $y(t) = 4e^{-2t}\cos 3t + 3e^{-2t}\sin 3t + U(t - 5)\ 3e^{-2(t-5)}\sin 3(t - 5)$. $y(\pi) = -4e^{-2\pi}$.
SVAR: Differentialekvationens lösning är $y(t) = 4e^{-2t}\cos 3t + 3e^{-2t}\sin 3t + 3U(t - 5)\ e^{-2(t-5)}\sin 3(t - 5)$.
Det sökta funktionsvärdet är $y(\pi) = -4e^{-2\pi}$.

7. a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.
Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.
Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.

b) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

c) Vad händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten (3,4) ?

<u>Lösning:</u>

a) Vi vet att $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Insättning ger $(\mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2)' = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2)$.
Vi får: $\mathbf{X}_1' + i\ \mathbf{X}_2' = \mathbf{AX}_1 + i\ \mathbf{AX}_2$.

Realdelen respektive imaginärdelen är: $\begin{cases} \mathrm{Re}: & \mathbf{X}_1' = \mathbf{AX}_1 \\ \mathrm{Im}: & \mathbf{X}_2' = \mathbf{AX}_2 \end{cases}$.

b) Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda+1)^2 + 16$.

Egenvärdena är $\lambda = -1 \pm 4i$.
Vi bestämmer en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$.

Denna fås ur ekvationen $\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v}$ med $\lambda = -1 + 4i$ insatt.

Vi får $\begin{pmatrix} 2-4i & -4 \\ 5 & -2-4i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \mathbf{e}^{-t}(\cos 4t + i\sin 4t)(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix})$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} + i\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 4t\right\}.$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} \\ \mathrm{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_2 = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 4t\right\} = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix} \end{cases}$$

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna.

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix}$$

eller med hjälp av en fundamentalmatris

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\cos 4t & 2e^{-t}\sin 4t \\ e^{-t}(\cos 4t + 2\sin 4t) & e^{-t}(\sin 4t - 2\cos 4t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

c) En partikel placerad i punkten (3,4) kommer efter lång tid att hamna i origo,
ty komplexa egenvärden med negativ realdel ger en inåtgående spiral.

SVAR: a) Se ovan .

b) Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix}$.

c) Partikeln kommer att hamna i origo.

8. Studera systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösning:

Vi startar med att bestämma var tangentvektorn är lika med noll.
Detta ger oss de kritiska(stationära) punkterna.
Därefter studerar vi de kritiska punkternas karaktär genom att undersöka Taylorutvecklingen kring aktuell kritisk punkt, med andra ord en linjarisering. Jacobimatrisen blir då ett viktigt redskap.

Tangentvektorn lika med noll ger: $\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$, $\begin{cases} (x, y) = (0,0) \\ (x, y) = (-1,0) \\ \text{Två kritiska punkter.} \end{cases}$

Jacobimatrisen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x & \dfrac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$

Insättning av respektive kritisk punkt ger:

$(x, y) = (0,0)$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har komplexa egenvärden med positiv realdel.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \dfrac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{15}{16}$.

Dessa är $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

$(x, y) = (-1,0)$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har skilda egenvärden och olika tecken.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \dfrac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \dfrac{1}{4})^2 - \dfrac{17}{16}$.

Dessa är $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De kritiska punkterna är (0,0) och (-1,0).
Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.
Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

9. Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$
som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$
och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

Lösning:

Variabelseparation ger oss produktlösningar men vi utnyttjar BETA.

Den lösning till differentialekvationen och randvillkoren ges enligt BETA 10.9.Ex2 av

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx$$

Begynnelsevillkoret ger $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$.

En direkt identifiering ger $c_3 = 2$, $c_4 = 7$, $c_7 = 1$ och övriga $c_n = 0$.

Vi får $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.