KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 17 augusti 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

Examinator: Hans Tranberg.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ där $D_{xy} = \{(x,y): 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ -y \le x \le y\}$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$ ut ur kroppen som definieras av olikheterna $x^2+y^2+z^2 \le 4$ och $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Beräkna linjeintegralen $\int_C \pi dx + xdy$, där C ges av $\{(x,y):\ x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0,\ \ x: R \to -R\}$.

Bestäm även linjeintegralens minsta värde.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + y = y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.

Ange därefter lösningens existensintervall.

5. Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.

Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.

Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.

Modell1: $\frac{dT}{dt} = -\frac{T-40}{3}$. Modell 2: $\frac{dT}{dt} = \frac{T-30}{3}$.

Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.

Vad är produktens temperatur efter lång tid ?

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 9\delta(t-5)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. Här är $\delta(t-5)$ Diracs deltafunktion. Bestäm även $y(\pi)$.

7. a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.

Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.

Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.

b) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

c) Vad händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten (3,4)?

8. Studera systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

9. Lös den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$

och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.