Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

<u>Betygsgränser</u> A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

<u>Betygsgränser</u> 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

Examinator: Hans Tranberg

1. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

<u>Lösning:</u>

Volymen erhålles som $V = \iiint_V dxdydz$.

Integrera först i z-led. $V = \iiint_V dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz \right\} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$.

Bestäm området D_{xy} . Skärningskurvan mellan paraboloiden och xy-planet är $x^2 + y^2 = 4$.

Integrationsområdet $D_{xy} = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le 4\right\}$. Inför polära koordinater.

$$V = \iint_{D_{rv}} \left(4 - r^2\right) r dr dv = 2\pi \int_{r=0}^{2} (4r - r^3) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{2} = 8\pi .$$

SVAR: Den sökta volymen $V = 8\pi$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{grad} f \ \ d\mathbf{r}$, där $f(x,y) = \ln r$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = (x,y)$ och C är den räta linjen från punkten $(1,0)$ till punkten $(3,4)$.

<u>Lösning:</u>

Vi utvecklar $\mathbf{grad} f \ \ d\mathbf{r} = \left(f'_x, \ f'_y\right) \ (dx, dy) = f'_x dx + f'_y dy = df$.

Då kan linjeintegralen skrivas $\int_C \mathbf{grad} f \ \ d\mathbf{r} = \int_C df = f(3,4) - f(1,0) = \ln\sqrt{3^2 + 4^2} - \ln\sqrt{1^2 + 0^2} = \ln 5$.

SVAR: Linjeintegralen blir $\ln 5$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och med radien två.

<u>Lösning:</u>

En lösning är att tillämpa divergenssatsen.

$$\int_S \mathbf{r} \ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = \iiint_K div\mathbf{r} \, dxdydz = \iiint_K (1+1+1) dxdydz = 3 \iiint_K dxdydz .$$

Vi erhåller tre gånger klotets volym.

$$\int_S \mathbf{r} \ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = 3 \ \frac{4\pi \ 2^3}{3} = 32\pi .$$

En annan lösning är att genomföra beräkningen direkt.

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{r} = (x,y,z)$ genom en yta S och i riktningen $\mathbf{n}$ ges av flödesintegralen $\int_S \mathbf{r} \ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma$.

En normal till sfären ges av vektorn $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och dess längd är 2.

Integranden blir $\mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (x, y, z)\ \frac{(x, y, z)}{2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{r^2}{2}$.

På den aktuella ytan är $r = 2$ varvid integranden blir konstant lika med två.

Flödesintegralen blir $\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = \int_S 2d\sigma = 2\int_S d\sigma$, vilket är sfärens dubbla area.

Vi får $\int_S \mathbf{r}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d\sigma = 2\ \ 4\pi\ \ 2^2 = 32\pi$.

SVAR: Utflödet genom sfären är 32π.

4. I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras vara beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden.
Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation.
Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning. Ange även befolkningsmängden efter lång tid.

<u>Lösning:</u>

Den sökta modellen blir: $\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$, där $P \geq 0$.

Inför de givna värdena på konstanterna $k_1 = 3$ och $k_2 = 1$: $\frac{dP}{dt} = 3P - P^2 = P(3 - P)$.

Vi bestämmer först de stationära lösningarna och analyserar därefter lösningarnas uppförande för olika startvärden.
Vi är intresserade av långtidsbeteendet.
De stationära lösningarna ges av: $P_1 = 0$ och $P_2 = 3$.

Vi erhåller: $\begin{cases} P > 3 & \frac{dP}{dt} < 0 \quad P(t) \text{ är avtagande} \\ 0 < \mathrm{P} < 3 & \frac{dP}{dt} > 0 \quad P(t) \text{ är växande.} \end{cases}$

Detta innebär att vi erhåller ett stabilt jämviktsläge $P = 3$.
Efter lång tid kommer befolkningsmängden att vara lika med 3.

SVAR: Den sökta modellen ges av: $\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P^2$, där $P \geq 0$ och $\lim_{t \to \infty} P(t) = 3$.

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 15y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ och bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$. Är systemets kritiska punkt stabil eller instabil ?

<u>Lösning.</u>

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn.
Vi får att den kritiska punkten är origo.
Vi bestämmer matrisens egenvärden.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 15 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7).$$

Egenvärdena är reella och med olika tecken och de är $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 7$.
Systemets kritiska punkt, origo, är en sadelpunkt och därmed instabil.
För att bestämma den allmänna lösningen till systemet behövs egenvärden och tillhörande egenvektorer. Egenvektorerna erhålles ur systemet $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$, där $\mathbf{A}$ är systemets matris.
Det återstår att bestämma egenvektorerna.

Insättning av $\lambda_1 = -1$ i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och en lösning är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Insättning av $\lambda_2 = 7$ i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och en lösning är $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm konstanterna. Villkoret ger oss $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den lösning som uppfyller villkoret är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den lösning som uppfyller villkoret är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Systemets kritiska punkt, origo, är en sadelpunkt och därmed instabil.

6. Bestäm $y(4)$ då $y(t)$ satisfierar ekvationen $y' = 2U(t-3) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$, $t \ge 0$ och $y(0) = 0$.
$U(t)$ är Heavisides stegfunktiion.
Lösning:
Laplacetransformera ekvationen.
$sY(s) - y(0) = 2\dfrac{e^{-3s}}{s} + \dfrac{1}{s}Y(s)$
Insättning av villkoret och hyfsning ger: $(s^2-1)Y(s) = 2e^{-3s}$, $\quad Y(s) = \dfrac{2}{s^2-1}e^{-3s}$
Partialbråksuppdela den rationella funktionen.
$\dfrac{2}{s^2-1} = \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{1}{s-1}$ vilket erhållits med hjälp av handpåläggning.
Återtransformering ger $y(t) = U(t-3)\left\{-e^{-(t-3)} + e^{t-3}\right\}$.
Det återstår att bestämma det sökta funktionsvärdet.
Vi får $y(4) = U(4-3)\left\{-e^{-(4-3)} + e^{4-3}\right\} = e - e^{-1}$.
Detta kan även skrivas $y(4) = 2\sinh 1 = \dfrac{e^2-1}{e}$.
SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(4) = 2\sinh 1 = \dfrac{e^2-1}{e}$

7. En lösning till differentialekvationen $ty'' - (1+t)y' + y = 0$, $t > 0$ ges av $y = e^t$.
Bestäm en bas för differentialekvationens lösningsrum samt ange den allmänna lösningen.
Lösning:

En bas för differentialekvationens lösningsrum består av de linjärt oberoende lösningarna.
Vi bestämmer först en av den givna lösningen linjärt oberoende lösning.
Vi använder reduktion av ordning. Detta innebär att vi sätter $y = e^t z$.
Insättning i differentialekvationen ger: $t\{e^t z'' + 2e^t z' + e^t z\} - (1+t)\{e^t z' + e^t z\} + e^t z = 0$.
Förenkla: $t\{z'' + 2z' + z\} - (1+t)\{z' + z\} + z = 0$, $tz'' + (t-1)z' = 0$.
Sätt: $u = z'$, $u' = z''$. Vi får då $tu' + (t-1)u = 0$, vilken är separabel.
Omformning ger: $\frac{u'}{u} = \frac{1-t}{t} = \frac{1}{t} - 1$. Vi söker en lösning.
Integration map t : $\ln|u| = \ln t - t$, $u = \pm te^{-t}$. En lösning sökes, tag $u = te^{-t}$, $z' = te^{-t}$.
Partiell integration ger: $z = -te^{-t} - e^{-t}$. Vi får då $y = e^t(-te^{-t} - e^{-t}) = -t - 1$.
Även $y = t + 1$ är en lösning. Vi undersöker det linjära oberoendet och använder då
Wronskian, vilken skall vara skild ifrån noll. $W(e^t, t+1) = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = -te^t < 0$ då $t > 0$.
De två funktionerna, $y = e^t$ och $y = t + 1$, är linjärt oberoende och bildar en bas för lösningsrummet till den givna differentialekvationen.
Den allmänna lösningen erhålles som en godtycklig linjärkombination av basfunktionerna.
Vi får således $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.
SVAR: En bas för differentialekvationens lösningsrum är $\{e^t, t+1\}$
och den allmänna lösningen ges av $y = c_1 e^t + c_2(t+1)$.

8. Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $u'_x - u'_y = u$
som uppfyller villkoret $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x}$.
<u>Lösning:</u>
Vi använder variabelseparation.
Insättning av $u(x,y) = X(x)Y(y)$ i differentialekvationen: $X'(x)Y(y) - X(x)Y'(y) = X(x)Y(y)$.
Dividera med $X(x)Y(y)$: $\frac{X'(x)}{X(x)} - \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 1$, $\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{konstant} = \lambda$.
Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.
Vi får $\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}$ och detta system har lösningen $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$.
Den partiella differentialekvationen har lösningar på formen
$u(x,y) = X(x)Y(y) = ABe^{\lambda x + (\lambda-1)y} = Ce^{\lambda x + (\lambda-1)y}$.
Även linjärkombinationer är lösningar : $u(x,y) = C_1 e^{\lambda x + (\lambda-1)y} + C_2 e^{\lambda x + (\lambda-1)y}$.
Villkoret $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x}$ ger $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$.
Identifiering ger: $\begin{cases} C_1 = 5 \ , \ \lambda_1 = -4 \\ C_2 = 3 \ , \ \lambda_2 = -2 \end{cases}$. Insättning ger: $u(x,y) = 5e^{-4x-5y} + 3e^{-2x-3y}$.
SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 5e^{-4x-5y} + 3e^{-2x-3y}$.

9. Studera systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.
<u>Lösning:</u>

Vi startar med att bestämma var tangentvektorn är lika med noll.
Detta ger oss de kritiska(stationära) punkterna.
Därefter studerar vi de kritiska punkternas karaktär genom att undersöka Taylorutvecklingen kring aktuell kritisk punkt, med andra ord en linjarisering. Jacobimatrisen blir då ett viktigt redskap.

Tangentvektorn lika med noll ger: $\begin{cases} 0 = y \\ 0 = -x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$, $\begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (-1,0) \\ \text{Två kritiska punkter.} \end{cases}$

Jacobimatrisen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2x & \frac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$

Insättning av respektive kritisk punkt ger:

$\underline{(x,y) = (0,0)}$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har komplexa egenvärden med positiv realdel.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$.

Dessa är $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

$\underline{(x,y) = (-1,0)}$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ har skilda egenvärden och olika tecken.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$.

Dessa är $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De kritiska punkterna är (0,0) och (-1,0.
Den kritiska punkten $(0,0)$ är en instabil spiral.
Den kritiska punkten $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.