KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.
Betygsgränser A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.
Betygsgränser 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.
Examinator: Hans Tranberg

1. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{grad} f \; d\mathbf{r}$, där $f(x,y) = \ln r$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = (x,y)$ och C är den räta linjen från punkten $(1,0)$ till punkten $(3,4)$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och med radien två.

4. I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras vara beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden.
Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation.
Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning. Ange även befolkningsmängden efter lång tid.

5. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 15y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ och bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$. Är systemets kritiska punkt stabil eller instabil ?

6. Bestäm $y(4)$ då $y(t)$ satisfierar ekvationen $y' = 2U(t-3) + \int_0^t y(\tau)d\tau$, $t \geq 0$ och $y(0) = 0$.
$U(t)$ är Heavisides stegfunktiion.

7. En lösning till differentialekvationen $ty'' - (1+t)y' + y = 0$, $t > 0$ ges av $y = e^t$.
Bestäm en bas för differentialekvationens lösningsrum samt ange den allmänna lösningen.

8. Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $u'_x - u'_y = u$ som uppfyller villkoret $u(x,0) = 5e^{-4x} + 3e^{-2x}$.

9. Studera systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - 3y^2\right)y \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.