KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, SF1636(5B1210,5B1230).

Tisdagen den 16 augusti 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

<u>Betygsgränse</u>r A: 31-36, B: 27-30, C: 23-26, D: 19-22, E: 15-18, FX: 13-14.

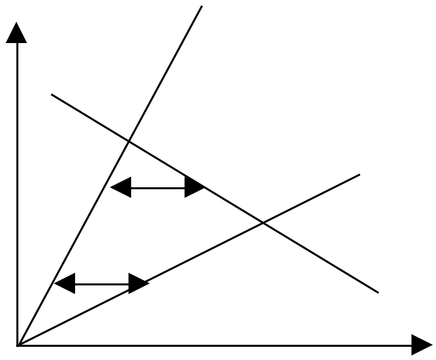
<u>Betygsgränse</u>r 5: 30-36, 4: 23-29, 3: 15-22.

Examinator: Hans Tranberg

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,2)$.

<u>Lösning:</u>

Vi ritar upp området. Triangeln begränsas av de räta linjerna : $x+y=3$, $y=2x$ och $x=2y$.



Vid integrationen måste området uppdelas i två delområden.

Vi börjar med integration med avseende på x.

$$\iint_D dxdy = \int_{y=0}^{1}\left\{\int_{x=y/2}^{2y} dx\right\}dy + \int_{y=1}^{2}\left\{\int_{x=y/2}^{3-y} dx\right\}dy = \int_{y=0}^{1}\frac{3y}{2}dy + \int_{y=1}^{2}\left(3-\frac{3y}{2}\right)dy$$

$$\iint_D dxdy = \frac{3}{4}\left[y^2\right]_{y=0}^{1} + \left[3y-\frac{3y^2}{4}\right]_{y=1}^{2} = \frac{3}{4}+6-3-3+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

SVAR: Den sökta dubbelintegralen blir $\frac{3}{2}$. Arean av triangeln har beräknats.

2. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiderna $z=8-x^2-y^2$ och $z=x^2+y^2$.

<u>Lösning</u>:

Volymen ges av trippelintegralen $V=\iiint_K dxdydz$ där K är det område vars volym skall bestämmas.

Vi bestämmer först integrationsområdet i xy-planet.

$z=8-x^2-y^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$.

Området i xy-planet är en cirkelskiva med centrum i (0,0) och med radien lika med två.

Vi påbörjar integrationen i z-led: $V=\iiint_K dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left\{\int_{z=x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz\right\}dxdy = \iint_{D_{xy}}\left\{8-2x^2-2y^2\right\}dxdy$

Inför polära koordinater.

$$\begin{cases} x=r\cos v \\ y=r\sin v \end{cases} \quad dxdy = rdrd\theta \quad \begin{cases} r:\ 0\to 2 \\ \theta:\ 0\to 2\pi \end{cases}$$

$$V=\iint_{D_{r\theta}}\left\{8-2r^2\right\}rdrd\theta=2\ \ 2\pi\int_{r=0}^{2}(4r-r^3)dr=4\pi\ \ (8-4)=16\pi$$

SVAR: Volymen av området mellan paraboloiderna är $V=16\pi$.

3. Beräkna $\iint_S (2z-2+y)d\sigma$, där S är den del av planet $2x+3y+6z=12$ som ligger i första oktanten.

<u>Lösning</u>:

Vi projicerar ytan S på xy-planet. Dess projektion ges av $D_{xy}=\left\{(x,y):2x+3y\le 12\right\}$.

Integrationselementet $d\sigma$ ersättes med $\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$.

En enhetsnormal till S ges av $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{(2,3,6)}{7}$. Riktningscosinen $\cos\gamma=\dfrac{6}{7}$.

Den sökta ytintegralen övergår då i en dubbelintegral.

$$\Phi=\iint_S(2z-2+y)d\sigma=\iint_{D_{xy}}(\frac{1}{3}(12-2x-3y)-2+y)\frac{dxdy}{\left|\frac{6}{7}\right|}=\frac{7\ \ 2}{18}\iint_{D_{xy}}(3-x)dxdy$$

Integranden är en funktion av x. Integrera först med avseende på y.

$$\Phi=\frac{7}{9}\int_{x=0}^{6}\left\{\int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}}(3-x)dy\right\}dx=\frac{7}{9}\int_{x=0}^{6}\frac{2(6-x)}{3}(3-x)dx=\frac{14}{27}\int_{x=0}^{6}(18-9x+x^2)dx$$

$$\Phi=\frac{14}{27}\left[18x-9\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{6}=\frac{14}{27}\left(18\ \ 6-9\ \ 18+4\ \ 18\right)=\frac{28}{3}$$

SVAR: Den sökta ytintegralen $\iint_S(2z-2+y)d\sigma=\dfrac{28}{3}$.

4. Funktionen $x(t)$ uppfyller $x'=x(2-x)(4-x)$, $x(0)=x_0$.

Undersök om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty}x(t)$ existerar samt beräkna detta för varje initialvärde x_0.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer först de kritiska punkterna. Där är derivatan lika med noll.

De stationära(kritiska) punkterna är $x_1=0$, $x_2=2$ och $x_3=4$.

En teckenstudie av derivatan ger information rörande funktionens utseende.

$x>4$: $x'>0$ $\quad x$ växer.

$2<x<4$: $x'<0$ $\quad x$ avtar.

$0<x<2$: $x'>0$ $\quad x$ växer.

$x<0$: $x'<0$ $\quad x$ avtar.

Gränsvärdet existerar för varje initialvärde x_0 mellan 0 och 4.

Vi erhåller följande gränsvärden:

$0<x_0<4$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=2$, $x_0=4$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=4$ och $x_0=0$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$.

SVAR: Gränsvärdet existerar enligt följande:

$0<x_0<4$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=2$, $x_0=4$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=4$ och $x_0=0$: $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$.

5. Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera cykliskt(periodiskt) med tiden t , mätt i månader, enligt följande:

y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den cykliska faktorn $\cos\frac{\pi\ t}{6}$ ·

På morgonen den 16 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton och den 16 augusti är $y = 3$ ton. Bestäm $y(t)$ som funktion av t . Bestäm även när fiskebeståndet är minst och dess minsta värde.

Lösning:

Beståndet, $y(t)$, uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$, där k är en proportionalitetskonstant.

Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningen saknar i detta fall intresse.

Omformning ger: $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k\cos\frac{\pi t}{6}$. Integration med avseende på t ger: $\ln|y| = k\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6} + A$.

Lös ut y : $y = \pm e^A e^{k\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}} = Ce^{k_0\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Vi bestämmer nu konstanterna med hjälp av villkoren $\begin{cases} 1 = y(0) = C \\ 3 = y(3) = Ce^{k_0\sin\frac{\pi 3}{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} C = 1 \\ e^{k_0} = 3, \quad k_0 = \ln 3 \end{cases}$.

Beståndet ges av $y(t) = e^{\ln 3\sin\frac{\pi t}{6}} = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Det minsta värdet, $y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, erhålles då $\sin\frac{\pi t}{6} = -1$, $t = 9 + 12n$, $n \in N$.

SVAR: Beståndet uppfyller differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$ och är $y(t) = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Beståndet är minst den 16 februari varje år och är lika med $\frac{1}{3}$ ton.

6. Funktionerna $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x\ln x,\ y_3(x) = 5x,\ y_4(x) = x^2$ och $y_5(x) = x + x^2$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation. Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen. Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3,\ y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$.

Lösning:

En linjär tredje ordningens homogen differentialekvation har tre linjärt oberoende lösningar och dessa bildar en bas för lösningsrummet. Av de fem givna lösningarna väljes tre lösningar ut så de blir linjärt oberoende.

Tag till exempel följande: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\ln x$ och $y_4(x) = x^2$.

För att visa att dessa lösningar är linjärt oberoende visar vi att Wronskianen är skilt från noll.

$$W(x,\ x\ln x,\ x^2) = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & \ln x + 1 & 2x \\ 0 & 1/x & 2 \end{vmatrix} = x(2\ln x + 2 - 2) - 1(2x\ln x - x) = x > 0$$

En fundamental lösningsmängd är $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$.

Den allmänna lösningen kan skrivas $y = C_1 x + C_2 x\ln x + C_3 x^2$.

Det återstår att bestämma den lösning som uppfyller de givna villkoren.

Bilda första- och andraderivatan.

$y' = C_1 + C_2(\ln x + 1) + C_3 2x$ och $y'' = C_2\frac{1}{x} + C_3 2$.

Insättning av villkoren ger: $\begin{cases} 3 = y(1) = C_1 + C_3 \\ 2 = y'(1) = C_1 + C_2 1 + C_3 2 \\ 1 = y''(1) = C_2 + C_3 2 \end{cases}$.

Systemet har lösningen $C_1 = 1$, $C_3 = 2$, $C_2 = -3$. Den sökta lösningen är $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$.

Den lösning som uppfyller de givna villkoren är $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.

7. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 13y = 3\delta(t-\pi)$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

Lösning:

Laplacetransformera den givna differentialekvationen.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\big(sY(s) - y(0)\big) + 13Y(s) = 3e^{-s\pi}$$

Insättning av begynnelsevillkoren och hyfsning av ekvationen ger: $(s^2 + 4s + 13)Y(s) = 3e^{-s\pi} + s + 8$.

Lös ut $Y(s)$ och förbered uttrycket för återtransformation:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}e^{-s\pi} + \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + 2\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

Återtransformera: $y(t) = e^{-2(t-\pi)}\sin 3(t-\pi)U(t-\pi) + e^{-2t}\cos 3t + 2e^{-2t}\sin 3t$

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = e^{-2t}(-e^{2\pi}\sin 3t\ \ U(t-\pi) + \cos 3t + 2\sin 3t)$.

8. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella matriselement.

Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A}$ är $\lambda = \alpha + i\beta$, där $\alpha \in R$ och $\beta \in R$.

Tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer.

Härled två reella linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Genomför även beräkningarna för matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösning:

Låt $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ vara en komplex lösning till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Insättning ger: $\mathbf{X}_1' + i\mathbf{X}_2' = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2) = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + i\mathbf{A}\mathbf{X}_2$.

Tag real- respektive imaginärdel: $\begin{cases} \text{Re: } \mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 \\ \text{Im: } \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2 \end{cases}$.

Realdel och imaginärdel av den komplexa lösningen är lösningar till systemet.

En komplex lösning ges av $\mathbf{X} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)$.

$$\begin{cases} \text{Re: } \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\cos\beta t - \mathbf{v}_2\sin\beta t) \\ \text{Im: } \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\sin\beta t + \mathbf{v}_2\cos\beta t) \end{cases}$$

Observera att de två lösningarna är linjärt oberoende, ty det finns inga konstanter a och b skilda ifrån noll så att $a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$.

Nu över till de numeriska beräkningarna. Vi startar med att bestämma matrisens egenvärden.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 \quad , \quad \lambda_{1,2} = 4 \pm i3 .$$

Bestäm en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 4 + i3$.

Insättning av detta egenvärde i systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{X} = e^{(4+i3)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{4t}(\cos 3t + i\sin 3t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Två linjärt oberoende lösningar är: $\begin{cases} \operatorname{Re}\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 = e^{4t}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin 3t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \\ \operatorname{Im}\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 = e^{4t}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 3t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} \end{cases}$.

Vi kontrollerar det linjära oberoendet genom att visa att Wronskianen är skilt ifrån noll.

$$W(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)=\begin{vmatrix} e^{4t}\cos 3t & e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\sin 3t & -e^{4t}\cos 3t \end{vmatrix} = -e^{8t} \neq 0 .$$

SVAR: Två linjärt oberoende lösningar ges av $\begin{cases} \mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\cos\beta t-\mathbf{v}_2\sin\beta t) \\ \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1\sin\beta t+\mathbf{v}_2\cos\beta t) \end{cases}$.

Numeriskt erhålles: $\mathbf{X}_1 = e^{4t}\begin{pmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{pmatrix}\sin 3t\\ -\cos 3t\end{pmatrix}$.

9. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ {}^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden $t=0$ är stavens temperatur $u(x,0)=2\sin 3x+5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem: $\begin{cases} u'_t = u''_{xx}\ ,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u'_x(\dfrac{\pi}{2},t)=0,\ t>0 \\ u(x,0)=2\sin 3x+5\sin 7x\ ,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t)=X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t)=X''(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{T'(t)}{T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\text{konstant}=\lambda$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ T'(t)-\lambda T(t)=0 \end{cases}$.

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.
Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.
Dessa är följande: $\lambda>0$, $\lambda=0$ och $\lambda<0$.

$\underline{\lambda=\mu^2,\ \mu\ \ R}$	$\underline{\lambda=0}$	$\underline{\lambda=-\mu^2,\ \mu\ \ R}$
$X''(x)-\mu^2X(x)=0$	$X''(x)=0$	$X''(x)+\mu^2X(x)=0$
$X(x)=A_1e^{\mu x}+B_1e^{-\mu x}$	$X(x)=A_2x+B_2$	$X(x)=A_3\cos\mu x+B_3\sin\mu x$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor:

$X(0)T(t)=0,\ X'(\dfrac{\pi}{2})T(t)=0,\ t>0$.

Dessa skall gälla för alla $t>0$.

Detta ger: $X(0)=0,\ X'(\dfrac{\pi}{2})=0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

$\underline{\lambda=\mu^2,\ \mu\ \ R}$	$\underline{\lambda=0}$	$\underline{\lambda=-\mu^2,\ \mu\ \ R}$
$X(x)=A_1e^{\mu x}+B_1e^{-\mu x}$	$X(x)=A_2x+B_2$	$X(x)=A_3\cos\mu x+B_3\sin\mu x$
$X'(x)=\mu(A_1e^{\mu x}-B_1e^{-\mu x})$	$X'(x)=A_2$	$X'(x)=\mu(-A_3\sin\mu x+B_3\cos\mu x)$

Insättning av villkoren ger.

$\underline{\lambda=\mu^2,\ \mu\ \ R}$	$\underline{\lambda=0}$	$\underline{\lambda=-\mu^2,\ \mu\ \ R}$
$X(0)=A_1+B_1=0$	$X(0)=B_2=0$	$X(0)=A_3=0$
$X'(\dfrac{\pi}{2})=\mu(A_1e^{\mu\frac{\pi}{2}}-B_1e^{-\mu\frac{\pi}{2}})=0$	$X'(\dfrac{\pi}{2})=A_2=0$	$X'(\dfrac{\pi}{2})=\mu(-A_3\sin\mu\dfrac{\pi}{2}+B_3\cos\mu\dfrac{\pi}{2})=0$

$$\begin{cases} B_1 = -A_1 \\ \mu A_1 (e^{\mu \frac{\pi}{2}} + e^{-\mu \frac{\pi}{2}}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_3 = 0 \\ \mu B_3 \cos \mu \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$.
Då erhålles $\mu = 2n+1$, $n \in N$ och lösningen har formen $X(x) = B_3 \sin(2n+1)x$.
Motsvarande t-ekvation har lösningen $T(t) = C_3 e^{\lambda t} = C_3 e^{-(2n+1)^2 t}$.
Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x,t) = X(x)T(t) = B_3 C_3 \sin(2n+1)x \ e^{-(2n+1)^2 t}$.
Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.
Vi erhåller $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$.
Det återstår att bestämma koefficienterna.
Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.
Insättning ger: $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.
Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.
Vi får $b_1 = 2$ och $b_3 = 5$. Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t} \sin 3x + 5e^{-49t} \sin 7x$.
SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = 2e^{-9t} \sin 3x + 5e^{-49t} \sin 7x$.