SVAR och

LÖSNINGSFÖRSLAG

5B1212

20/8 2004

(1.) $x^2\frac{dy}{dx}+y=1 \quad , \quad x>0$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x^2}$. $\mu = e^{\int \frac{1}{x^2}dx} = e^{-\frac{1}{x}}$ är integrerande faktor

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-1/x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}y}=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{-1/x}y\right]=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$

$\Leftrightarrow e^{-1/x}y=\int\frac{1}{x^2}e^{-1/x}dx + C$

$\Leftrightarrow e^{-1/x}y = e^{-1/x}+C$

$\Leftrightarrow \underline{y = 1 + C e^{1/x}}$ = SVAR

(2.) $y(x)=Ay_1+By_2+Cy_3$ där

$y_1 = xe^{-2x}$, $y_2=e^{-2x}$ och $y_3=e^{3x}$

Vi ser att y är allmän lösning till en 3:e ordningens linjär homogen ODE med konst. koefficienter, där den karaktäristiska ekvationen har en dubbelrot $r_{1,2}=-2$ och en enkelrot $r_3=3$. Detta ger karaktäristisk ekvation $(r+2)^2(r-3)=0$

$\Leftrightarrow (r^2+4r+4)(r-3)=0$

$\Leftrightarrow \quad r^3+r^2-8r-12=0$

dvs. ekvationen är $\underline{y'''+y''-8y'-12y=0}$:= SVAR

(3.) $\bar{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{X}$

Bestäm egenvärden:

$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - \cancel{2} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = 4 \vee 1$

$\lambda_1 = 4$ svarar mot egenvektor $\bar{K}_1 \neq \bar{0}$ som löser

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \bar{K}_1 = \bar{0}$. Ta t.ex $\bar{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

som ger $\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

$\lambda_2 = 1$ svarar mot $\bar{K}_2 \neq 0$ s.a. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{K}_2 = \bar{0}$

Ta t.ex $\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$

Allmän Lösning:

$\bar{X}(t) = c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2 = \underline{c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}}$

:= SVAR

(4.) Låt $v(t)$ vara föremålets lodräta hastighet (som funktion av tiden), där

a) positiv hastighet är i fallriktning mot marken.

Låt m = föremålets massa

g = tyngdkraftens acceleration

$a(t) = v'(t)$ = föremålets acceleration

Newtons 2:a lag: $F_{tot} = ma$, där

F_{tot} = totala kraften som påverkar föremålet.

Förutsättning: $F_{tot} = F_{grav} + F_{frik}$

där $F_{grav} = mg$ = gravitationskraft

$F_{frik} = -kv$ = friktion, $k > 0$ konstant.

$\Rightarrow \quad mv' = mg - kv$

$\Leftrightarrow \quad v' = g - \frac{k}{m} v \Leftrightarrow \underline{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g}$

Begynnelsevärde (i vila vid $t=0$) $\underline{v(0)=0}$

Svar: $\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$,

beteckningar enligt ovan

4

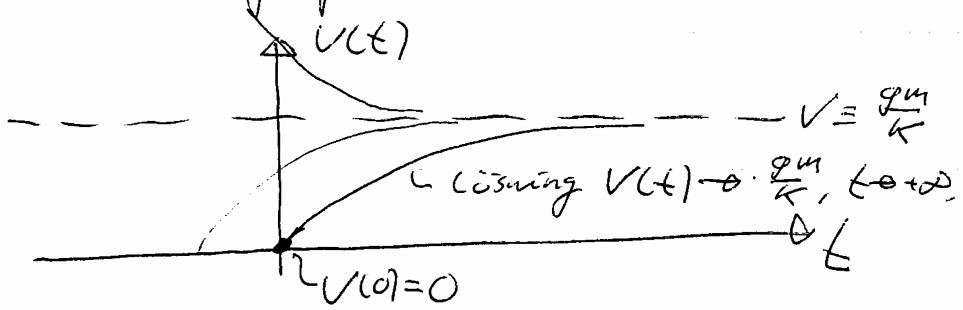
b) $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v$$

$\Rightarrow$ $v \equiv \frac{gm}{k}$ stationär lösning

$\frac{dv}{dt} > 0$ om $v < \frac{gm}{k}$

$\frac{dv}{dt} < 0$ om $v > \frac{gm}{k}$

ger utökat fasporträtt



Problemet har en unik lösning $v(t)$. Den startar $v(0)=0$ (begynnelsehastighet), och hastigheten växer monotont, så länge föremålet är i luften, och närmar sig asymptotiskt $v = \frac{gm}{k}$ när t växer.

5.

Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} x + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ $x = 1$ eller $x = -1$

$x = 1$ & (1) saknar lösningar

$x = -1$ & (1) $\Leftrightarrow$ $y = 1$ eller $y = -1$

Alltså: Två kritiska punkter $(-1,1)$, $(-1,-1)$

Stabilitet studeras m.h.a. systemets Jacobimatris

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x+y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2-1) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$J(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärden som ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}$$

dvs icke-reella egenvärden med positiv realdel

$\Rightarrow$ $(-1,1)$ är instabil spiral

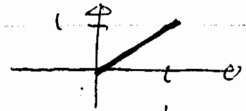
$J(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärden

$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{17/4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{17/4}$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

$\Rightarrow$ $(-1,-1)$ är sadelpunkt och därmed instabil

SVAR: $(-1,1)$ instabil spiral
$(-1,-1)$ sadelpunkt (instabil)

6 a) $f(x)=x$ på $(0,1)$



Kos-serie för f = Cosserie för f:s jämna utvidgning $\left(f(x)=|x|\right)$ på $(-1,1)$, ges av

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

där $a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1$

och $a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{matrix}\right\}$

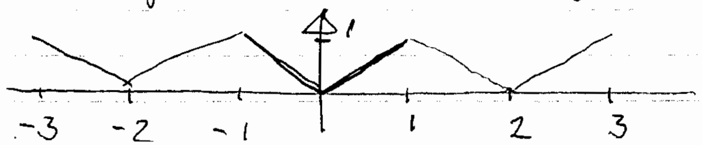
$$= \underbrace{2\left[x\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases} -4/n^2\pi^2 & n=1,3,5,\dots \\ 0 & n=2,4,6,\dots\end{cases}$$

SVAR a): $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos[(2m-1)\pi x]}{(2m-1)^2}$

b) Cos-serien i a) konvergerar mot den 2-periodiska utvidgningen av f:s jämna utvidgning $f(x)=|x|$. Dvs. g har graf



7 a)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} & (1)\\ y(0)=a & (2)\end{cases}$$

Så länge $y>0$ är (1) $\Leftrightarrow$

$$\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int dt \Leftrightarrow \sqrt{y}=t+C'$$

$$\underset{y>0}{\Leftrightarrow} \quad y=(t+C')^2$$

$y(0)=a$ ger $\sqrt{a}=0+C'$, dvs $C'=\sqrt{a}$

så $\underline{y(t)=(t+\sqrt{a})^2}$: SVAR a)

b) (A) $y(t)=(t+\sqrt{a})^2>0$ på intervallet $t>-\sqrt{a}$, och $y(t)=(t+\sqrt{a})^2$ är definierad och uppfyller begynnelsevärdesproblemet alla $t>-\sqrt{a}$.

(B) Eftersom $f(y)=2\sqrt{y}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$ är kontinuerliga för $y>0$, gäller att genom varje punkt i övre halvplanet $(y>0)$ går precis en lösningskurva

(A) & (B) $\Rightarrow$ $y(t)=(t+\sqrt{a})^2$ är unik lösning på $t>-\sqrt{a}$.

8. $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -y \end{cases}$ (1)

a) • Systemet är linjärt och inhomogent

$\Rightarrow$ $\overline{X}(t) = \overline{X}_h(t) + \overline{X}_p(t)$ är allmän lösning, där $\overline{X}_h$ är den allmänna lösningen till motsv. homogena ekvation, och $\overline{X}_p$ är en partikulärlösning till (1).

• Eftersom systemet också är autonomt är ev. stationära lösningen partikulärlösn.

$$\begin{cases} 2x+y+1 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 0 \end{cases}$$ är en sådan.

dvs. $\overline{X}_p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Motsv. homogena ekv. är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$ Systemet är triangulärt, med egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 2$ ger egenvektor $\overline{K}_1 \neq \overline{0}$ som löser $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\overline{K}_1 = 0$, t.ex $\overline{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ ger på motsv. sätt $\overline{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{X}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

8 forts

<u>SVAR a)</u> $$\overline{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -3e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8b) $\overline{X} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ är stationär lösning

$c_1 = c_2 = 0$

• $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$: $\overline{X}(t) = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

är parametrisering av räta halvlinjer med riktningsvektor $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

När $t \to +\infty$ går dessa lösningar mot stationära lösningen i $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$: $\overline{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

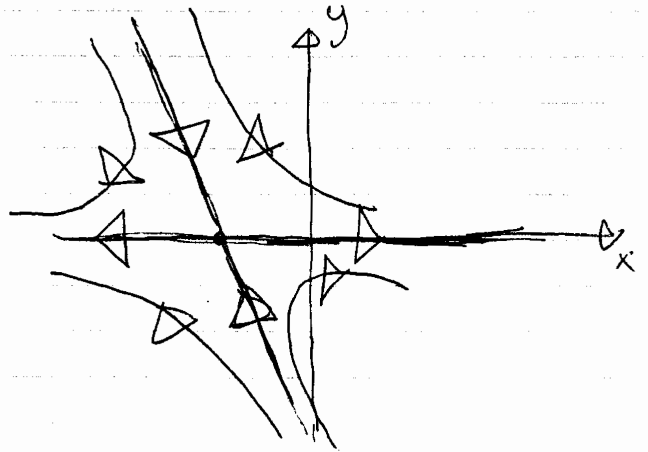
är parametrisering av halvlinjer på x-axeln.

När $t \to -\infty$ går dessa lösningar mot $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $c_1 \neq$, $c_2 \neq 0$.

Den stationära lösningen är av sadeltyp. Eftersom systemet är linjärt fås <u>globalt</u> fasporträtt av sadeltyp.

(8) b) forts.



(9.) Vi söker lösningen på formen $u(x,y)=X(x)Y(y)$
$\Rightarrow u_{xx}=X''Y$, $u_{yy}=XY''$. Diff.ekv. övergår i
$X''Y+XY''=0$ (1).

Randvärdet $u(0,y)=0$, $0<y<1$ övergår i
$X(0)Y(y)=0$, $0<y<1$. Eftersom vi söker icketriviala lösningar ($u=XY\not\equiv 0$) $\Rightarrow X(0)=0$.
Motsv. argument för de andra två homogena randvillkoren ger.

$$\begin{cases} X(0)=0 & (2) \\ X(1)=0 & (3) \\ Y(0)=0 & (4) \end{cases}$$

Det sista icke-homogena randvillkoret behandlas senare

(9.) $u=XY$ $\quad X''Y+XY''=0 \quad X''Y=-XY''$

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\gamma$$

$u(0,y)=X(0)Y(y)=0=X(1)Y(y) \qquad 0<y<1$

$\Rightarrow X(0)=X(1)=0$

- $\gamma=-\lambda^2 \quad X''+\lambda^2X=0 \quad X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$

$X(0)=0 \Rightarrow X(x)=B\sin\lambda x$ $\quad$ $S\neq 0$

$X(1)=\underset{\neq 0}{B}\sin\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_n=n\pi$ $\quad n=1,2,\ldots$

$\underline{X=X_n=B_n\sin\lambda_n x=B_n\sin n\pi x}$

- $-\frac{Y''}{Y}=-\lambda_n^2 \qquad Y''=\lambda_n^2 Y$

$Y=Y_n(y)=C_n e^{\lambda_n y}+D_n e^{-\lambda_n y}$

$0=u(x,0)=X(x)Y(0) \Rightarrow Y(0)=0$

$\Rightarrow C_n=-D_n \Rightarrow Y_n(y)=C_n\left(e^{\lambda_n y}-e^{-\lambda_n y}\right)$

$u_n=X_nY_n=a_n\left(e^{\lambda_n y}-e^{-\lambda_n y}\right)\sin n\pi x$

$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(e^{\lambda_n y}-e^{-\lambda_n y}\right)\sin n\pi x$

$u(x,1)=1=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{a_n\left(e^{\lambda_n}-e^{-\lambda_n}\right)}_{b_n=2\int_0^1\sin n\pi x\,dx}\sin n\pi x$

(9) forts

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y}$. Eftersom VL är oberoende av y, och HL oberoende av x är VL = HL = konstant. Vi får

$$\begin{cases} X'' = \gamma X & (5) \\ Y'' = \gamma Y & (6) \end{cases}$$

(5), (2) och (3) bestämmer $X(x)$.

För $\gamma = \lambda^2 > 0$ ger (5) $X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$,
(2) & (3) $\Rightarrow$ $A = B = 0$, dvs endast trivial lösning

För $\gamma = 0$ ger (5) $X(x) = Ax + B$ och
(2) & (3) ger igen $A = B = 0$

För $\gamma = -\lambda^2 < 0$ $(\lambda > 0)$ ger (5)

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

(2) $\Rightarrow$ $A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \Rightarrow A = 0$

så $X(x) = B\sin\lambda x$

(3) & villkoret $B \neq 0$ ger då $\sin\lambda = 0$

$$\underset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \quad \lambda = \lambda_n = n\pi$$

Dvs: Endast för $\gamma = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2$ fås icke triviala $X(x)$. Dessa ges av

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin n\pi x$$

(9) forts För $\gamma = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2$ bestämmer vi Y som uppfyller (6) och (4)

(6) $\Rightarrow$ $Y'' = -\lambda_n^2 Y \Rightarrow Y = Y_n(y) = c_n e^{\lambda_n y} + d_n e^{-\lambda_n y}$

(4) $\Rightarrow$ $c_n e^0 + d_n e^0 = 0 \Leftrightarrow c_n = -d_n$

dvs $Y(y) = Y_n(y) = c_n\left(e^{\lambda_n y} - e^{-\lambda_n y}\right)$.

Bilda $u_n(x,y) = X_n Y_n = b_n\left(e^{\lambda_n y} - e^{-\lambda_n y}\right)\sin\lambda_n x$

och $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$.

Superpositionsprincipen $\Rightarrow$ u uppfyller alla givna ekvationer utom $u(x,1) = 1$, $0<x<1$.

Detta sista villkor ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(e^{\lambda_n} - e^{-\lambda_n}\right)\sin n\pi x = 1, \quad 0<x<1.$$

Vi ser att $\beta_n = b_n\left(e^{n\pi} - e^{-n\pi}\right)$ måste vara Fourier-sinus koefficienterna för $f(x) = 1$ $0<x<1$

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \int_0^1 \sin n\pi x = $$

$$= \frac{2}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}\left[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{2/n\pi}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}\left(1 - (-1)^n\right)$$

(9)

forts: SVAR:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\cdot\frac{(e^{n\pi y}-e^{-n\pi y})}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}\sin n\pi x$$

---

(10) (CL) a) & b) se kurslitteraturen "ITERATIONER"

c) Antag att $f(q)=q$ och att $|f'(q)|<1$.

Eftersom f'' existerar är f' kontinuerlig, så $|f'(x)|\leq k<1$ i ett helt interval $I=(q-a,q+a)$.

Tag $x\in I$. Då är

$$|f(x)-q|=|f(x)-f(q)|=\left\{\begin{matrix}\text{Medelvärdes}\\\text{satsen}\end{matrix}\right\}=$$

$$|f'(z_0)||x-q|\leq k|x-q|,$$ där z_0 ligger mellan x och q $\Rightarrow z_0\in I$.

På motsv. sätt fås

$$|f^2(x)-q|=|f^2(x)-f^2(q)|=|f'(z_1)||f(x)-f(q)|$$
$$\leq k|f(x)-f(q)|\leq k^2|x-q|$$

och induktivt fås

$$|f^n(x)-q|\leq k^n|x-q|,\quad 0<k<1$$

(10) (CL)

c) forts.

Eftersom $k^n|x-q|\to 0$ när $n\to\infty$ gäller också $|f^n(x)-q|\to 0$, $n\to\infty$, dvs $f^n(x)\to q$, $n\to\infty$ för alla $x\in I=(q-a,q+a)$. Alltså är q stabil.

(10) (D)

Se kurslitteraturen (Kompendium om Fourier Transform)