

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 16/12 2004 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.

För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.

Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

OBS: Endast bonuspoäng tagna under HT04 får räknas vid denna tentamen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Lycka till!

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet $x \frac{dy}{dx} + 2y = 1$, $y(1) = 0$, och ange lösningens existensintervall.
2. Bestäm och klassificera (med avseende på typ och stabilitet) de stationära lösningarna till det autonoma systemet
$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x^2 + y \end{cases}$$
3. Bestäm koefficienterna b_n så att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 1$ för alla $0 < x < p$.
4. Bestäm den allmänna lösningen $y_g(x)$ till $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ då $x > 0$.
Tips: Börja med att söka lösningar på formen $y(x) = x^m$.
5. Lös det linjära systemet $\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och skissera dess fasporträtt.

6. Lös randvärdesproblemet
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, 0 < x < 1; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 2 \sin 4\pi x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

B-uppgifter

7. En viss differentialekvation $\frac{dy}{dt} = f(y)$ har precis tre stationära lösningar, $y = 0$ och $y = 2$ som båda är attraherande, samt $y = 1$ som är repellerande.

- a) Skissera ett tänkbart fasporträtt i ty -planet. (2p)
b) Ge exempel på en differentialekvation med de ovan angivna egenskaperna. (2p)

8. Bestäm samtliga lösningar till systemet
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y + e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4y + e^{4t} \end{cases}.$$

9. En vanlig modell i populationsbiologi är den s k *Ricker-modellen*. Det är en tidsdiskret modell för en populations storlek, där storleken $x_n \geq 0$ av den n :te generationen bestäms av den föregående enligt $x_n = l x_{n-1} e^{-x_{n-1}}$, där $l > 0$ är en konstant. Bestäm för varje $l > 0$ modellens fixpunkter och avgör om möjligt deras stabilitet.

10. Beräkna Fouriertransformen av
$$f(t) = \begin{cases} t & -1 < t < 1; \\ 0 & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Ange också formeln för inverstransformering.

11. Bestäm kritiska punkter och deras stabilitet till systemet

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2)^2 \\ y' = x - y(x^2 + y^2)^2 \end{cases}.$$

12. Låt $f(t)$ vara en deriverbar periodisk funktion definierad på hela reella axeln.

- a) Visa att $f(t)$ och $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t - a)$, där a är en reell konstant, har samma frekvensspektrum. (2p)
b) Ge detta resultat en signalteoretisk tolkning. (2p)