

TENTAMEN SB1212 30/3 2005
SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

①. EKVATIONEN ÄR LINJÄR. FÖR $x \neq 1$ KAN DEN SKRIVAS

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x-1} y = 0 \quad (\text{STANDARDFORM})$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x-1} dx} = e^{2 \ln|x-1|} = (x-1)^2 \quad \text{ÄR INTEGRERANDE FAKTOR. VI FÅR}$$

$$(x-1)^2 y' + 2(x-1)y = 0$$

$$\frac{d}{dx} [(x-1)^2 y] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 y = C \quad \Leftrightarrow y = \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\text{INITIALVÄRDET } y(2) = -4 \Rightarrow -4 = \frac{C}{(2-1)^2} = C$$

$$\text{SÅ } y(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

DESSA FUNKTION ÄR DERIVERBAR PÅ $(-\infty, 1)$ OCH $(1, \infty)$.

VI SÖKER DEN LÖSNING SOM STARTAR I $x=2$ OCH FÅR ALLSÅ EXISTENSINTERVALET $(1, \infty)$

$$\text{SVAR: } y(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}, \quad 1 < x < \infty.$$

②. i) ÄR FALSKT

$$\text{Bevis: } y_3 = y_1 + y_2 \Rightarrow y_3' = y_1' + y_2', \quad y_3'' = y_1'' + y_2''.$$

$$\begin{aligned} \text{ALLSÅ ÄR } y_3'' + p y_3' + q y_3 &= \\ &= (y_1'' + y_2'') + p(y_1' + y_2') + q(y_1 + y_2) = \\ &= (y_1'' + p y_1' + q y_1) + (y_2'' + p y_2' + q y_2) = \\ &= \{y_1 \text{ och } y_2 \text{ löser (*)}\} = 1 + 1 = 2 \neq 1 \end{aligned}$$

ii) ÄR SANT

$$\text{Bevis: } y_4(x) = y_1(x) - y_2(x) \Rightarrow y_4' = y_1' - y_2', \quad y_4'' = y_1'' - y_2''$$

$$\begin{aligned} \text{ALLSÅ ÄR } y_4'' + p y_4' + q y_4 &= \\ &= \{ \text{samma typ av resonemang som ovan} \} \\ &= (y_1'' + p y_1' + q y_1) - (y_2'' + p y_2' + q y_2) = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

SVAR: } ii) är falskt
 } iii) är sant

③ Stationära lösningar ges av

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} (2+x)(y-x) = 0 & (1) \\ (4-x)(y+x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) ~~2~~ $x = -2$ eller $x = y$

(2) $x = -2$ ~~2~~ $\begin{cases} 6(x+y) = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = -2 \\ y = +2 \end{cases}}}$

(2) $x = y$ ~~2~~ $\begin{cases} (4-x)(2x) \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}} \text{ eller } \underline{\underline{\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}}}$

dvs. TRE STATIONÄRA LÖSNINGAR.

$$\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) = -x^2 + xy + 2y - 2x \stackrel{\text{def}}{=} P(x,y) \\ y' = (4-x)(y+x) = -x^2 - xy + 4y + 4x \stackrel{\text{def}}{=} Q(x,y) \end{cases}$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial P / \partial x & \partial P / \partial y \\ \partial Q / \partial x & \partial Q / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y - 2 & x + 2 \\ -2x - y + 4 & -x + 4 \end{pmatrix}$$

$$J(-2,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ (Triangelär)} \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$$

är egenvärden. $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow (-2,2)$ ÄR INSTABIL NOD

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ Egenvärden ges av}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 14 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{15}$$

SÅ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow (0,0)$ ÄR SADELPUNKT
(dvs. INSTABIL)

$$J(4,4) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 48 \Rightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{9-48}$$

dvs. KOMPLEXA EGENVÄRDEN MED $\text{Re}(\lambda) < 0$

$\Rightarrow (4,4)$ STABIL SPIRAL.

SVAR: $\begin{matrix} (-2,2) & \text{INSTABIL NOD} \\ (0,0) & \text{SADELPUNKT (INSTABIL)} \\ (4,4) & \text{STABIL SPIRAL} \end{matrix}$

④ Systemmatrisens egenvärden ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7, \text{ dvs } \lambda = \pm i\sqrt{7}$$

Rent imaginära egenvärden visar

i linjära system mot alla lösningar, utom den stationära $(x,y) \equiv (0,0)$, är slutna kurvor i xy -planet kring $(0,0)$, dvs. periodiska lösningar.

SVAR: JA, ALLA LÖSNINGAR ÄR PERIODISKA.

5. $f(x)$ är en udda funktion, så
Fourierserien blir en ren sinus-serie

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{där}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx =$$

"udda · udda = jämn"

$$= \left[\begin{array}{ll} U = x^2 & V = -\frac{\cos nx}{n} \\ dU = 2x \, dx & dV = \sin nx \, dx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} U = x & V = \frac{\sin nx}{n} \\ dU = dx & dV = \cos nx \, dx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2 \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[-x^2 \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{4}{n^3\pi} \left[\cos nx \right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi + \frac{4}{n^3\pi} (\cos n\pi - 1) =$$

$$= -\frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi} ((-1)^n - 1)$$

SVAR: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad -\pi < x < \pi$

där $b_n = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi} ((-1)^n - 1)$

[I själva verket gäller likhet alla $x \in (-\pi, \pi)$, se lärbooken]

6. Vi söker $u(x,y) = \bar{X}(x) Y(y)$

Då är $\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{X}'(x) Y(y)$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{X}(x) Y'(y)$

Ekvationen kan då skrivas

$$\bar{X}' Y \bar{X} Y' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X}' \bar{X} = \frac{1}{Y' Y} = f \left(\begin{array}{c} \text{om} \\ Y, Y' \neq 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
ober. av y ober. av x

där f är någon konstant. Vi får systemet

$$\begin{cases} \bar{X}' \bar{X} = f & (1) \\ Y' Y = \frac{1}{f} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X}' \bar{X} = f & (1) \\ Y' Y = \frac{1}{f} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{d\bar{X}}{dx} \bar{X} = f \Leftrightarrow \int \bar{X} \, d\bar{X} = \int f \, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{X}^2}{2} = fx + A. \quad \text{Vi väljer } \bar{X}(x) = \sqrt{2fx}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{dY}{dy} Y = \frac{1}{f} \quad \text{som på samma sätt har}$$

en lösning $Y(y) = \sqrt{\frac{2}{f} y}$

Vi får $u(x,y) = \bar{X} Y = \sqrt{4xy}$ som

• är def. för $x > 0, y > 0$

• uppfyller $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y}{2\sqrt{4xy}} \cdot \frac{4x}{2\sqrt{4xy}} =$

$$= \frac{4xy}{(\sqrt{4xy})^2} = 1$$

SVAR: T.ex

$$u(x,y) = \sqrt{4xy}$$

7. a) $\frac{dy}{dt} = f(t, y) = y^{2/3}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-1/3}$

f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i varje punkt (t_0, y_0) där $y_0 \neq 0$

$\Rightarrow$ Det går en unik lösningskurva genom (t_0, y_0) . [Enligt känd sats. Se Läraboken]

b/i) Genom inspektion inses att

(i) $y \equiv 0$

(ii) går igenom $(0, 0)$

(iii) uppfyller $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{konstant}) = 0 = 0^{2/3}$

(ii) Separation av variabler ger

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dt \Rightarrow 3y^{1/3} = t + C$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{t}{3} + C_1\right)^3, \text{ välj } C_1 = 0$$

$$\text{dvs. } y = \left(\frac{t}{3}\right)^3 \quad \text{så att } y(0) = 0$$

Separationssteget förutsätter $y \neq 0$, men

vi verifierar lösningen för alla t :

$$\frac{dy}{dt} = 3 \left(\frac{t}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{t}{3}\right)^2 = (y)^{2/3}$$

SVAR: a) Se ovan

b) T.ex. $y(t) \equiv 0$ och $y(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$

8. Vi söker en andra lösning på formen

$$y_2(t) = u(t) y_1(t) = \frac{u(t)}{t}. \quad \text{Där är}$$

$$y_2' = \frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2}$$

$$y_2'' = \frac{u''}{t} - \frac{u'}{t^2} - \frac{u'}{t^2} + 2\frac{u}{t^3} \\ = \frac{u''}{t} - 2\frac{u'}{t^2} + 2\frac{u}{t^3}$$

Insatt i den givna ekvationen ger detta

$$2t^2 \left(\frac{u''}{t} - 2\frac{u'}{t^2} + 2\frac{u}{t^3} \right) + 3t \left(\frac{u'}{t} - \frac{u}{t^2} \right) - \frac{u}{t} = 0$$

$$\Rightarrow 2tu'' - 4u' + 4\frac{u}{t} + 3u' - \frac{3u}{t} - \frac{u}{t} = 0$$

$$\Rightarrow 2tu'' - u' = 0. \quad \text{Sätt } z = u'$$

$$\Rightarrow z' - \frac{z}{2t} = 0 \quad (\text{Linjär 1:a ordning i } z)$$

$$\left[\mu = e^{\int -\frac{1}{2t} dt} = e^{-\frac{1}{2} \ln t} = e^{-\frac{1}{2} \ln t} = t^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} z' - \frac{1}{2t^{3/2}} z = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} z \right] = 0$$

$$\Rightarrow z = C\sqrt{t} \Rightarrow u = \int z = C_1 t^{3/2} + D.$$

$$\text{Vi väljer } C_1 = 1, D = 0 \Rightarrow u(t) = t^{3/2}$$

$$\Rightarrow y_2(t) = u y_1 = t^{3/2} \cdot \frac{1}{t} = \sqrt{t}$$

$$\text{SVAR: } y(t) = A_1 y_1 + A_2 y_2 = A_1 t^{-1} + A_2 \sqrt{t},$$

A_1 och A_2 godtyckliga konstanter

$$(9.) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vi bestämmer egenvärden till A:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

se $\lambda = 3$ är ett dubbelt egenvärde.

Egenvektorer $\bar{K} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ges av

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Ta t.ex. } \bar{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi får en lösning $\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$

Till $\lambda = 3$ hör endast denna egenvektoring

Sök $\bar{X}_2(t) = t \bar{K} e^{3t} + \bar{P} e^{3t}$ där

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{P} = \bar{K} \quad \text{t.ex.} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

t.ex. $\bar{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vilket ger

$$\bar{X}_2(t) = \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}$$

Allmän lösning $\bar{X}_h = c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2$

$$\boxed{\text{Svar: } \bar{X}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}}$$

(10.) Vi skall visa $\int_0^1 (\sin n\pi x)(\sin m\pi x) dx = 0$
om $n \neq m$ är positiva heltal.

Vi utnyttjar att $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$$\Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\pi x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)\pi x}{n+m} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{n-m} \underbrace{\left(\sin(n-m)\pi - \sin 0 \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{heltal} \\ = 0}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+m} \underbrace{\left(\sin(n+m)\pi - \sin 0 \right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{heltal} \\ = 0}}$$

$$= 0 \quad \text{V.S.B.}$$

11.

$$a) u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \Rightarrow$$

$$(i) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} [f'(x+ct) + f'(x-ct)] \quad \left(\begin{array}{l} \text{"chain derivative"} \\ = \frac{\partial}{\partial x}(x+ct) = 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} [f''(x+ct) + f''(x-ct)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} [f'(x+ct) \frac{\partial}{\partial t}(x+ct) + f'(x-ct) \frac{\partial}{\partial t}(x-ct)]$$

$$= \frac{1}{2} [c f'(x+ct) - c f'(x-ct)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c [f''(x+ct) \frac{\partial}{\partial t}(x+ct) - f''(x-ct) \frac{\partial}{\partial t}(x-ct)]$$

$$= \frac{1}{2} c [c f''(x+ct) + c f''(x-ct)] =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 [f''(x+ct) + f''(x-ct)]$$

$$\text{Så } c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(ii) u(x,0) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = f(x)$$

$$(iii) \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \stackrel{\text{enl.}}{\underset{\text{ovan}}{=}} \frac{1}{2} c [f'(x+0) - f'(x-0)] \Big|_{t=0} =$$

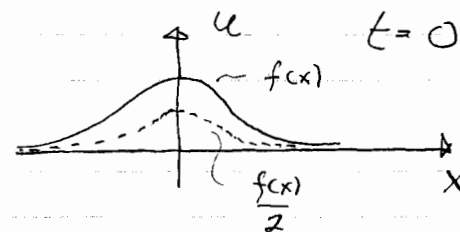
$$= \frac{1}{2} c (f'(x) - f'(x)) = 0$$

$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$ uppfyller
alltså det givna IV-problemet.

11. b)

$$u(x,0) = f(x)$$

$$= \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x)}{2}$$

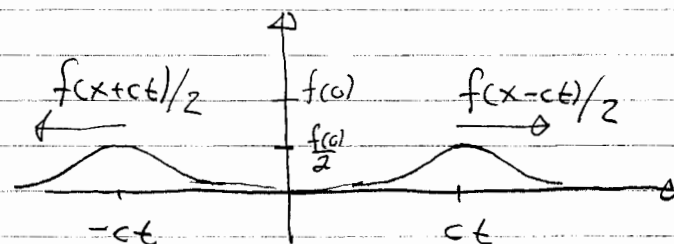


För $t > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct)$$

$\nearrow$
 $\frac{f(x)}{2}$ translaterad
 ct enheter åt vänster

$\nwarrow$
 $\frac{f(x)}{2}$ translaterad
 ct enheter åt höger



Den initiala utsvängningen $u(x,0)=f(x)$

"delar sig" i två vågor med halva
amplituden. Dessa rör sig med
hastighet c åt vänster resp. höger.

12CL $x_{n+1} = f(x_n)$ där $f(x) = \lambda x e^{-x}$

och $0 < \lambda \leq 1$ är en konstant.

Vi vill undersöka dynamiken med grafisk iteration.

Vi undersöker grafen $y = f(x)$

$$f'(x) = \lambda e^{-x} - \lambda x e^{-x} = \lambda(1-x)e^{-x} \cdot \begin{cases} > 0 & 0 \leq x < 1 \\ = 0 & x = 1 \\ < 0 & x > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) f har ett globalt maximum i $x=1$,
 $f(1) = \lambda e^{-1} < 1$ om $0 < \lambda \leq 1$

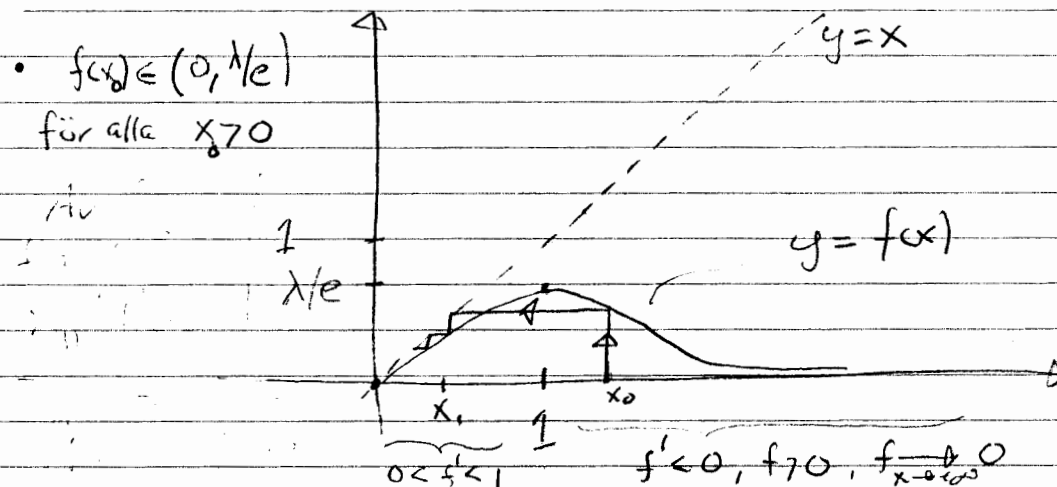
$$(2) 0 < f'(x) = \lambda(1-x)e^{-x} \leq \underbrace{\lambda}_{0 < \lambda \leq 1} \underbrace{(1-x)e^{-x}}_{\text{om } 0 \leq x \leq 1} < e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq 1$$

Vidare ett $\cdot f(0) = 0$ (3)

$\cdot f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ (4)

$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (5)

Detta ger följande principiella utseende:

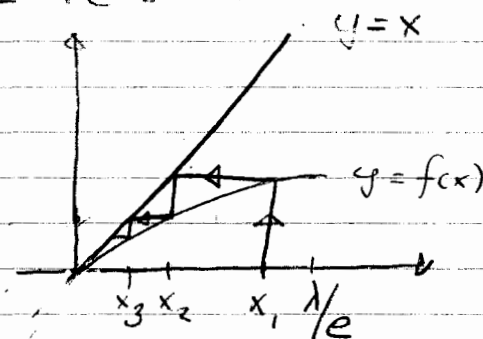


12CL
 forts.

Eftersom $0 < x_1 = f(x_0) \leq f_{\max} = \frac{\lambda}{e}$

för alla $x_0 \geq 0$, är populationen
 $x_1 < \frac{\lambda}{e}$ oavsett x_0 .

Enligt ovan fås dynamiken på
 $[0, \frac{\lambda}{e}]$ från nedanstående figur



Alternativt gäller att om $0 < x \leq \frac{\lambda}{e}$
 så är $0 < f'(x) \leq K < 1$.

Då är $|f(x) - 0| = |f(x) - f(0)|$
 $\leq K|x - 0| = Kx$

MEDELVÄRDSSATSEN

det. avståndet till origo krymper med
 åtminstone en faktor $K < 1$ i varje steg.

$\Rightarrow x_n = f^n(x) \leq K^n x_1 = K^{n-1} f(x_0)$

$\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, alla $x_0 \geq 0$.

Följaktligen går populationsstorleken i
 n -te generation mot 0, oavsett x_0 's storlek.

12.D En signal som består av en momentan puls vid tiden $t=t_0$ beskrivs av en multipel av en δ -spik

$$f(t) = G \delta(t - t_0).$$

Frekvensinnehållet beskrivs då av Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} s = t - t_0 & t = s + t_0 \\ ds = dt & t \rightarrow \pm\infty \rightarrow s \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\}$$

$$= G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{-i\omega(s+t_0)} ds =$$

$$= G e^{-i\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{-i\omega s} ds}_{e^{-i\omega 0} = 1} = G e^{-i\omega t_0}$$

Frekvensernas styrka beskrivs av

$$A(\omega) = |\hat{f}(\omega)| = |G e^{-i\omega t_0}| = |G| \underbrace{|e^{-i\omega t_0}|}_{=1} = |G| = \text{oberoende av } \omega. \quad \text{VSB.}$$