

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 30/3 2005 08.00-13.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

*OBS: Det finns två stycken uppgifter med nummer 12, en avsedd främst för dig som läst kursen med **CL** och en främst för dig som läst med **D**. Du kan dock själv välja vilken av de två du vill lösa, oberoende av vilken kursomgång du följde, men du får bara poäng för en av dessa två uppgifter; löser du bägge räknas den med högst poäng.*

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.

För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.

Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

OBS: Endast bonuspoäng tagna under HT04 får räknas vid denna tentamen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Lycka till!

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet $(x-1)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $y(2) = -4$, och ange lösningens existensintervall.

2. $y = y_1(x)$ och $y = y_2(x)$ är båda lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1$ (*)
där p och q är funktioner kontinuerliga på hela reella axeln.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt:

- i) $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ är också en lösning till (*).
ii) $y_4(x) = y_1(x) - y_2(x)$ är en lösning till ekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
(Glöm inte att bevisa dina påståenden.)

3. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} x' = (2+x)(y-x) \\ y' = (4-x)(y+x) \end{cases}$ och klassificera dem med avseende på typ och stabilitet.

4. Avgör om systemet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har periodiska lösningar.

5. Bestäm Fourierserien till $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < p \\ -x^2, & -p < x < 0 \end{cases}$ på intervallet $(-p, p)$.

6. Bestäm en funktion $u(x, y)$ på formen $u(x, y) = f(x)g(y)$ sådan att $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1$ för alla $x > 0, y > 0$.

B-uppgifter

7. Betrakta differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = y^{2/3}$. Visa att
- det går precis en lösningskurva genom varje punkt i ty -planet där $y \neq 0$; (2p)
 - det går minst två olika lösningskurvor genom origo. (2p)
8. Ekvationen $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, t > 0$, har en lösning $y_1(t) = t^{-1}$ (detta behöver ej verifieras). Bestäm den allmänna lösningen.
9. Bestäm samtliga lösningar till systemet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
10. Visa att funktionerna $\{\sin npx\}_{n=1}^{\infty}$ är parvis ortogonala på intervallet $0 \leq x \leq 1$.
11. Utsvängningen på en oändligt lång sträng i punkten x vid tiden t beskrivs av funktionen $u(x, t)$ som uppfyller initialvärdesproblemet
- $$\begin{cases} c^2 u_{xx}'' = u_{tt}'', & t > 0, -\infty < x < \infty; \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}.$$
- där $c > 0$ är en konstant och f är en två gånger deriverbar funktion.
- Visa att $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct))$ är en lösning. (1p)
 - Beskriv hur den initiala utsvängningen fortplantar sig längs strängen. Vilken fysikalisk tolkning har konstanten c ? (3p)
12. **[CL]** En vanlig modell i populationsbiologi är den s k *Ricker-modellen*. Det är en tidsdiskret modell för en populations storlek, där storleken $x_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$, av den n :te generationen bestäms av den föregående enligt $x_n = l x_{n-1} e^{-x_{n-1}}$, där $l > 0$ är en konstant. Visa att för $l \leq 1$ dör populationen ut, oavsett storleken på initialpopulationen x_0 .
12. **[D]** Formulera och förklara följande påstående matematiskt: "I en signal som består av en momentan puls förekommer alla frekvenser med samma styrka".