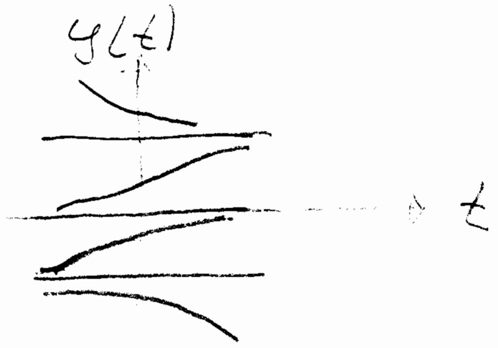
5B1212 30/5 2005
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $y = y_0$ stationär lösning $\Leftrightarrow$ $y_0 \sin y_0 = 0$

$\Leftrightarrow$ $y_0 = -\pi$, 0 eller π (givet att $-\frac{3\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}$)

y	y	$\sin y$	$\frac{dy}{dt} = y \sin y$
$3\pi/2$			
	$+$	$-$	$-$
π	$+$	0	0
	$+$	$+$	$+$
0	0	0	0
	$-$	$-$	$+$
$-\pi$	$-$	0	0
	$-$	$+$	$-$
$-3\pi/2$			



Av tabell och figur framgår att ekvationen har

$\boxed{\text{SVAR: Tre stationära lösningar } y = \pi \text{ (stabil) } y = 0 \text{ (semistabil) och } y = -\pi \text{ (instabil)}}$

---

2. Vi löser först motsv. homogena ekvation

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad (H)$$

$y_1 = x$ löser (H), ty $y_1' = 1$ och $y_1'' = 0$

$\Rightarrow$ V.L. $= x \cdot 1 - x = 0 =$ H.L.

Ansätt nu $y_2 = xu$ som andra lösning till (H)

$\Rightarrow$ $y_2' = u + xu'$, $y_2'' = 2u' + xu''$.

y_2 insatt i (H) ger:

$$x^2(2u' + xu'') + x(u + xu') - xu = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 u'' + 3x^2 u' = 0 \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} xu'' + 3u' = 0$$

2 forts

Med $z = u'$ fås

$$z' + \frac{3}{x} z = 0. \quad \mu = e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 z' + 3x^2 z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^3 z\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = C/x^3 \quad \Leftrightarrow \quad u = \int z\,dx = \frac{A}{x^2} + B$$

$A = 1$, $B = 0$ ger $y_2 = y_1 u = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Allmän lösning till (H): $y_h(x) = C_1 x + C_2 \, 1/x$

Vi ser genom inspektion att $y_p = -1$ är en lösning till den givna ekvationen.

$$\boxed{\text{SVAR: } y_g(x) = y_p + y_h = -1 + C_1 x + C_2 \, 1/x}$$

---

3. Vi söker c s.a. $f(1) = 1 + c \neq 1$ (1)

och $f^2(1) = [f(1)]^2 + c = (1+c)^2 + c = 1$ (2)

(2) $\Leftrightarrow$ $c^2 + 3c = 0$ $\Leftrightarrow$ $c = 0$ eller $c = -3$

(1) $\Leftrightarrow$ $c \neq 0$, så $c = -3$ är enda lösning till (1) & (2).

Alltså $f(x) = x^2 - 3$, $f'(x) = 2x$

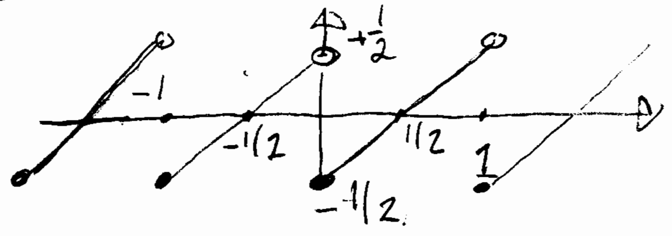
$f(1) = -2$, $f(-2) = 1$. Banan $= \{1, -2\}$

Eftersom $\left|(f^2)'(1)\right| = |f'(1)| \cdot |f'(-2)| =$

$= 2 \cdot 4 = 8 > 1$ är banan repellerande

$$\boxed{\text{SVAR: } c = -3, \text{ repellerande}}$$

4. $f(t) = t - 1/2, \quad 0 \le t < 1, \quad f(t+1) = f(t)$



f är <u>periodisk</u> med period $T = 1$. $\Rightarrow$
f uttrycks som Fourier<u>serie</u> av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x$$

där $\displaystyle a_0 = \frac{2}{T} \int_{1\text{ period}} f(t)\,dt = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,dt = 0$

ty f är udda på $(-1/2, 1/2)$

På samma sätt fås

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{1\text{ period}} f(t) \cos 2\pi n t\,dt = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{f(t) \cos 2\pi n t}_{\substack{\text{udda} \cdot \text{jämn} \\ = \text{udda}}} = 0$$

och $\displaystyle b_n = \frac{2}{T} \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{f(t) \sin 2\pi n t}_{\substack{\text{udda} \cdot \text{udda} \\ = \text{jämn}}}\,dt = 4 \int_0^{1/2} (t - 1/2) \sin 2\pi n t\,dt$

$$= \begin{bmatrix} U = t - 1/2 & V = -\cos 2\pi n t / 2\pi n \\ dU = dt & dU = \sin 2\pi n t\,dt \end{bmatrix} = 4\left[(t - 1/2)\left(-\frac{\cos 2\pi n t}{2\pi n}\right)\right]_0^{1/2}$$

$$+ \frac{2}{\pi n} \int_0^{1/2} \cos 2\pi n t\,dt = -\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin 2\pi n t}{2\pi n}\right]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\text{SVAR}}}: f(x) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}}$$

5. Stationära lösningar ges av

$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ y + 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-y) = 0 & (1) \\ y(1+2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) ger $x = 0$ eller $y = 2$ — KRITISKA PKT:

(2) & $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ dvs. $(0,0)$

(2) & $y = 2 \Leftrightarrow 1 + 2x = 0$ dvs $(-1/2, 2)$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(2x - xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y + 2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(y + 2xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ 2y & 1+2x \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2 \Rightarrow$$

instabil nod i linjär approx $\Rightarrow$ $(0,0)$ instabil nod

$$J(-1/2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$ har egenvärden

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ sadelpkt i linjär approx $\Rightarrow$ $(-1/2, 2)$ sadelpkt.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{SVAR:} & (0,0) \text{ instabil nod} \\ & (-1/2, 2) \text{ sadelpunkt (dvs. instabil)} \end{array}}$$

6. $u(x,y) = X(x)\,Y(y) \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\,Y(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)\,Y'(y).$$

Given ekvation övergår i

$$2X'Y = (XY')^2 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{X'}{X^2}}_{\text{ober. av } y} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(Y')^2}{Y}}_{\text{ober. av } x} = \underbrace{\gamma}_{\text{konst.}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = \gamma X^2 & (1) \\ (Y')^2 = 2\gamma Y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dX}{dx} = \gamma X^2 \overset{X \neq 0}{\Leftrightarrow} \int \frac{dX}{X^2} = \int \gamma\, dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{X} = \gamma x + C \Leftrightarrow X(x) = -\frac{1}{\gamma x + C}$$

Ta t.ex $X(x) = -\frac{1}{\gamma x}$

$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{dY}{dy}\right)^2 = 2\gamma Y$, Vi antar att $\gamma Y > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dY}{dy} = \pm\sqrt{2\gamma Y} \Leftrightarrow \int \frac{dY}{\sqrt{Y}} = \pm\int \sqrt{2\gamma}\, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{Y} = \pm\sqrt{2\gamma}\, y + D.$$ Ta t.ex $D = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{Y} = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\, y \Rightarrow Y = \frac{\gamma}{2} y^2$$

Detta ger $u(x,y) = XY = -\frac{1}{\gamma x} \cdot \frac{\gamma}{2} y^2 = -\frac{y^2}{2x}.$

Eftersom $\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{y^2}{2x^2}$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = -y/x$ är den givna ekv. uppfylld för alla (x,y), $x \neq 0$

$\boxed{\text{SVAR: T.ex } u(x,y) = -y^2/2x}$

7) a) $\frac{2}{3}\frac{du}{dx} + u = 1 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{3}{2}u = \frac{3}{2} \quad \mu = e^{\int \frac{3}{2}dx} = e^{\frac{3}{2}x}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{3/2x}\frac{du}{dx} + \frac{3}{2}e^{3/2x}u}_{\frac{d}{dx}\left[e^{3/2x}u\right]} = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{3/2x}u\right] = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}x}u = e^{\frac{3}{2}x} + C'$$

$$\Leftrightarrow u = 1 + C'e^{-\frac{3}{2}x}$$

b) $\frac{dy}{dx} + y = y^{-1/2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $\left[u = y^{3/2} \Leftrightarrow y = u^{2/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}u^{-1/3}\frac{du}{dx} \right]$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u^{-1/3}\frac{du}{dx} + u^{2/3} = u^{-1/3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\frac{du}{dx} + u = 1 \overset{a)}{\Leftrightarrow} u = 1 + C'e^{-3/2x}$$

$$\Leftrightarrow y = u^{2/3} = \left(1 + C'e^{-3/2x}\right)^{2/3}$$

INITIALVILLKORET $y(0) = 4 \Rightarrow$

$$\left(1 + C'e^{0}\right)^{2/3} = 4 \Leftrightarrow 1 + C = 4^{3/2} = 8$$

$$\Leftrightarrow C = 7$$

dvs $y(x) = \left(1 + 7e^{-\frac{3}{2}x}\right)^{2/3}$

[(*) H.L. $= \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y > 0$, så $u = y^{3/2}$ är väldef.
$\Rightarrow u > 0$ så $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}u^{-1/3}\frac{du}{dx}$ är väldef.]

SVAR: a) $u(x) = 1 + C'e^{-3/2x}$
b) $y(x) = \left(1 + 7e^{-3/2x}\right)^{2/3}$

8.

a) $x'' + \frac{1}{10}x' + \frac{1}{2}x^3 = 1 \Leftrightarrow x'' = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{10}x' + 1$

Speciellt gäller detta för $t = 0$ så

$$x''(0) = -\frac{1}{2}(x(0))^3 - \frac{1}{10}x'(0) + 1 = -\frac{1}{2}\cdot 2^3 - \frac{1}{10}(-1) + 1$$

$$= -4 + \frac{1}{10} + 1 = -\frac{29}{10} = -2.9$$

b) Partikeln förblir i vila omm den placeras i en kritisk punkt i fasplanet, (xx'-planet), dvs där $v = x'$ och $a = x''$ båda är $= 0$

Sätt $v = x'$. Enligt a): $v' = x'' = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{10}v + 1$

Vi får systemet

$$\begin{cases} x' = v & (1) \\ v' = -\frac{1}{10}v - \frac{1}{2}x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Kritiska punkter: $v = 0$, $\xrightarrow{\text{insatt i (2)}}$

$$\frac{1}{2}x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

SVAR: a) $a(0) = x''(0) = -2.9$

b) Partikeln skall placeras i $x = \sqrt[3]{2}$ med hastighet $v = 0$.

9. Homogena lösningar:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

ger egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$.

Till $\lambda_1 = 1$ hör $\overline{K}_1 \neq \overline{0}$ s.a.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \overline{K}_1 = \overline{0}, \quad \text{t.ex. } \overline{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Lösning } \overline{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Till $\lambda_2 = 2$ hör $\overline{K}_2 \neq \overline{0}$ s.a

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overline{K}_2 = \overline{0}, \quad \text{t.ex } \overline{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Lösning } \overline{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\overline{X}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}}_{=\Phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Partikulär lösning: $\overline{X}_p = \Phi(t)\,U(t)$ där

$$U(t) = \int \Phi^{-1} F \, dt, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

$$|\Phi| = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \Rightarrow \Phi^{-1} = e^{-3t} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1} F = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-4t} \\ -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \int \Phi^{-1} F = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 1/4\, e^{-4t} \\ e^{-2t} - \frac{2}{5} e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

9 férts

$$\bar{X}_p = \bar{\Phi} u = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t} \\ e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t\left(-2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t}\right) + e^{2t}\left(e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-5t}\right) \\ + e^t\left(-2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t}\right) + e^{2t}\left(e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-5t}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 + \frac{1}{2}e^{-3t} + 1 - \frac{2}{5}e^{-3t} \\ -2 + \frac{1}{4}e^{-3t} + 1 - \frac{2}{5}e^{-3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 + \frac{1}{10}e^{-3t} \\ -1 - \frac{3}{20}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

<u>Svar</u>: $\bar{X}_g(t) = \bar{X}_h + \bar{X}_p =$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{10}e^{-3t} \\ 1 + \frac{3}{20}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

10. $u_n(x,t)$, $n=1,2,\dots$, uppfyller de homogena ekvationerna (1) & (2)

SUPER-POSITION $\Rightarrow$ $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ uppfyller (1) & (2) (formellt)

$$(3) \Leftrightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = 0, \quad 0<x<\pi$$

$$\Leftrightarrow a_n = 0, \quad n=1,2,\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-a_n \sin nt + b_n \cos nt\right)\sin nx$$

så (4) $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx = \Theta(x-\pi/4)-\Theta(x-\pi/2), \quad 0<x<\pi$$

dvs $c_n = n b_n$ skall väljas som Fourier-sinus-koefficienter för $(\Theta(x-\pi/4)-\Theta(x-\pi/2))$ på $(0,\pi)$

$$\Leftrightarrow n b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\left[\Theta(x-\pi/4)-\Theta(x-\pi/2)\right]}_{\begin{cases}=1 & \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\\ =0 & \text{för övrigt}\end{cases}}\sin nx =$$

$$= 2/\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos nx\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Svar: } u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nt \sin nx}$$

11. $\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. Klart att $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enda krit. pkt.

[$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

så linjärisering ger ingen info om stabilitet.]

Lösningskurvor i xy planet beskrivs lokalt som $y = y(x)$ där $dx/dt \neq 0$, dvs $y \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^3}{y^2} \Leftrightarrow \int y^2\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C \Leftrightarrow y^3 = x^4 + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^4 + C_1}$$

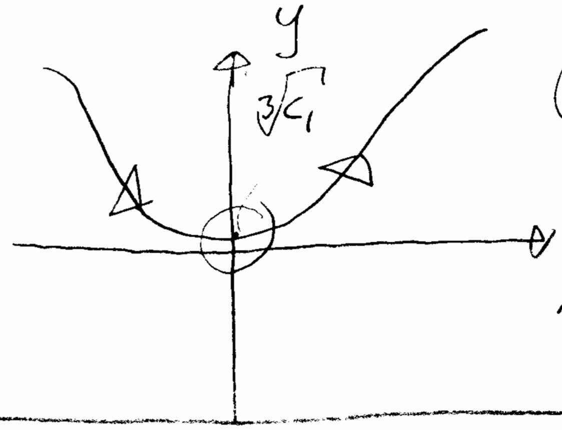
För $C_1 > 0$ är detta en funktion där $y(x) > 0$ alla x, dvs. grafen utgör en lösningskurva till det givna systemet.

$y = \sqrt[3]{x^4 + C_1}$ är en jämn funktion s.a.

- $y(0) = \sqrt[3]{C_1}$ är ett globalt minimum
- $y(x) \to +\infty$ när $x \to \pm\infty$.

Dvs. i varje omgivning till $(0,0)$ (dvs. för tillräckligt små C_1) finns en lösningskurva

11. forts



(riktningen framgår av vektorfältet)

SVAR:

$\Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ är instabil kritisk pkt}}$

---

12. $f(t)=e^{-t^2/2} \Rightarrow f'(t)=-te^{-t^2/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t)+tf(t)=0 \Rightarrow \mathcal{F}\{f'(t)\}+\mathcal{F}\{tf(t)\}=0$

$\overset{*)}{\Rightarrow} i\omega \hat{f}(\omega)+i\dfrac{d\hat{f}}{d\omega}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{d\hat{f}}{d\omega}+\omega\hat{f}(\omega)=0$ [Linjär 1:a ord (samma som för f!]

Med $\mu=e^{\int\omega\,d\omega}=e^{\omega^2/2}$ fås

$e^{\omega^2/2}\dfrac{d\hat{f}}{d\omega}+\omega e^{\omega^2/2}\hat{f}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{d}{d\omega}\left[e^{\omega^2/2}\hat{f}\right]=0 \Leftrightarrow e^{\omega^2/2}\hat{f}=C_1$

$\Leftrightarrow \hat{f}(\omega)=C_1e^{-\omega^2/2}$ V.S.B.

*) $\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega)=i\omega\hat{f}(\omega)$ och $\mathcal{F}\{tf(t)\}=i\dfrac{d\hat{f}}{d\omega}$