

1. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} = (1-x)e^{-y} \quad \Leftrightarrow \quad \int e^y dy = \int (1-x) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$(e^y \neq 0 \forall y)$$

$$e^y = x - \frac{x^2}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln\left(x - \frac{x^2}{2} + C\right).$$

Initialvillkoret $y(1) = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{2} + C\right) = \ln \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow C = 0 \quad \therefore \quad y = \ln\left(x - \frac{x^2}{2}\right).$

Lösningen existerar $\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 0$
 $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Svar: $y = \ln\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad 0 < x < 2$

2. Antsatsen $y = u e^{x^2} \Leftrightarrow y' = u' e^{x^2} + 2xu e^{x^2}$
 $y'' = u'' e^{x^2} + 2xu' e^{x^2} + 2u e^{x^2} + 2xu' e^{x^2} + 4x^2 u e^{x^2}.$

Insatt i den givna ekvationen ger detta

$$(u'' + 4xu' + 4x^2 u + 2u) e^{x^2} - 4x(u' + 2xu) e^{x^2} + (4x^2 - 1) u e^{x^2} = e^{x^2}$$

Eftersom $e^{x^2} \neq 0, \forall x$, fås efter förenkling

$$u'' + u = 1 \quad (*)$$

Den homogena ekvationen $u'' + u = 0 \Leftrightarrow u_h(x) = A \cos x + B \sin x$

En partikulär lösning utgörs av $u_p(x) \equiv 1$,

dvs $u(x) = A \cos x + B \sin x + 1$.

$$y = u e^{x^2} \text{ uppfyller givna ekv. om } u \text{ uppfyller } (*).$$

Svar: $y(x) = (A \cos x + B \sin x + 1) e^{x^2}$

3. Stationära lösningar = kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 4 = 0 & (1) \\ x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow y = x + 1.$$

Insatt i (1) fås $x^2 - 4(x+1) + 4 = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$

$\therefore (0,1)$ och $(4,5)$ är de kritiska punkterna.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4y + 4) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 4y + 4) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x - y + 1) & \frac{\partial}{\partial y}(x - y + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ med egenvärden } \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}$$

$$\text{dvs } \operatorname{Re} \lambda < 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0 \Rightarrow (0,1) \text{ stabil spiral}$$

$$J(4,5) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ med egenvärden } \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-8) + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 4 = 0$$

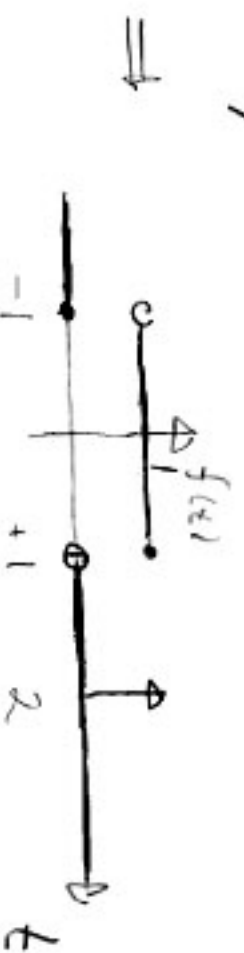
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 4} \text{ dvs reella egenvärden } \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$\Rightarrow (4,5) \text{ är en sadelpunkt och därmed instabil}$$

Svar: $(0,1)$ stabil, spiral

$(4,5)$ instabil, sadelpunkt.

$$4. a) \quad \Theta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases} \quad \mathcal{S}(t-a) = \begin{matrix} \text{"momentan"} \\ \text{"puls"} \end{matrix} \quad t=a$$



$$b) \quad \mathcal{F}\{f(t)\} \stackrel{\text{Pöge}}{=} \mathcal{F}\{\Theta(t+1) - \Theta(t-1)\} + \mathcal{F}\{\mathcal{S}(t-2)\}$$

injicitet,

$$\mathcal{F}\{\Theta(t+1) - \Theta(t-1)\} = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 \cos \omega t dt - i \int_{-1}^1 \sin \omega t dt$$

$$= \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_{-1}^1 = \frac{\sin \omega - \sin(-\omega)}{\omega} = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} \stackrel{\text{vadda}}{=} 0$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}(t-2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(t-2) e^{-i\omega t} dt = \begin{cases} \text{enligt def} \\ \text{av Dirac-}\delta \end{cases}$$

$$= e^{-i\omega t} \Big|_{t=2} = e^{-2i\omega} = \cos 2\omega - i \sin 2\omega$$

Svar: $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega + \omega \cos \omega}{\omega} - i \sin 2\omega$

$$5. \quad \text{Systemets egenvärden } \lambda \text{ ges av}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4.$$

Motsvarande egenvektningar ges av $\bar{K}_1 \neq \bar{0}$ s.a.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{K}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{K}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \bar{K}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{K}_2 \sim \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allmän lösning $\bar{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$

5
facts.

Villkoret $\overline{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = -5/3$$

$$C_2 = 5/3$$

$$\text{dus } \overline{X}(t) = \frac{-5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{3} (e^t - e^{4t}) \neq 0 \text{ för } t \neq 0$$

Svar: Nej, $(y(t) < 0 \text{ för } t > 0)$

6. $y'' + \lambda y = 0$. Kar. ekv: $r^2 + \lambda = 0$

Om $\lambda < 0$ fås $r^2 = -\lambda > 0$, $r = \pm \sqrt{-\lambda}$

$$\Rightarrow y(x) = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{se "}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \quad (1)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow A e^{\sqrt{-\lambda}} + B e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow B = -A, \text{ se } (2) \Rightarrow A (e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0$$

$$\text{Men } e^t \neq e^{-t} \text{ om } t \neq 0, \Rightarrow A = B = 0$$

dus. $\lambda < 0$ ger endast trivial lösning.

Om $\lambda = 0$ fås $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = Cx + D$

$$\text{Villkoren } y(0) = y(1) = 0 \Rightarrow C = D = 0 \therefore \text{Trivial}$$

(lösning)

Om $\lambda > 0$ har kar. ekv. rötterna $r = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$\Rightarrow y(x) = a \cos \sqrt{\lambda} x + b \sin \sqrt{\lambda} x.$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow a = 0, \text{ se } y(x) = b \sin \sqrt{\lambda} x$$

6.

$$\text{farts } y(1)=0 \quad \text{b} \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

icke-triviala lösningar (dus b $\neq 0$) fås om m

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0 \quad \sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\text{dus. } \lambda = n^2 \pi^2$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad \text{För } \lambda = n^2 \pi^2, \quad n=1, 2, 3, \dots \text{ fås}$$

$$\text{icke-triviala lösningar } y(x) = B \sin n\pi x$$

$$\textcircled{7} \quad \text{Sätt } z = y' \quad (\Rightarrow z' = y''). \quad \text{Givet ekv. blir då}$$

$$z' z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z dz = dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{2} = x + C_1$$

$$\text{Då } y'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z(0) = 1 \quad \text{fås } \frac{z^2}{2} = C_1, \text{ dus}$$

$$z^2 = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm \sqrt{2x + 1}, \quad \text{och } z(0) = 1$$

$$\text{ger } z = \sqrt{2x + 1}$$

$$y' = \sqrt{2x + 1} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int \sqrt{2x + 1} dx = \frac{1}{3} (2x + 1)^{3/2} + D$$

$$\text{Villkoret } y(0) = 0 \quad \text{ger}$$

$$\frac{1}{3} + D = 0 \quad \text{dus } D = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad y(x) = \frac{(2x + 1)^{3/2} - 1}{3}$$

8.

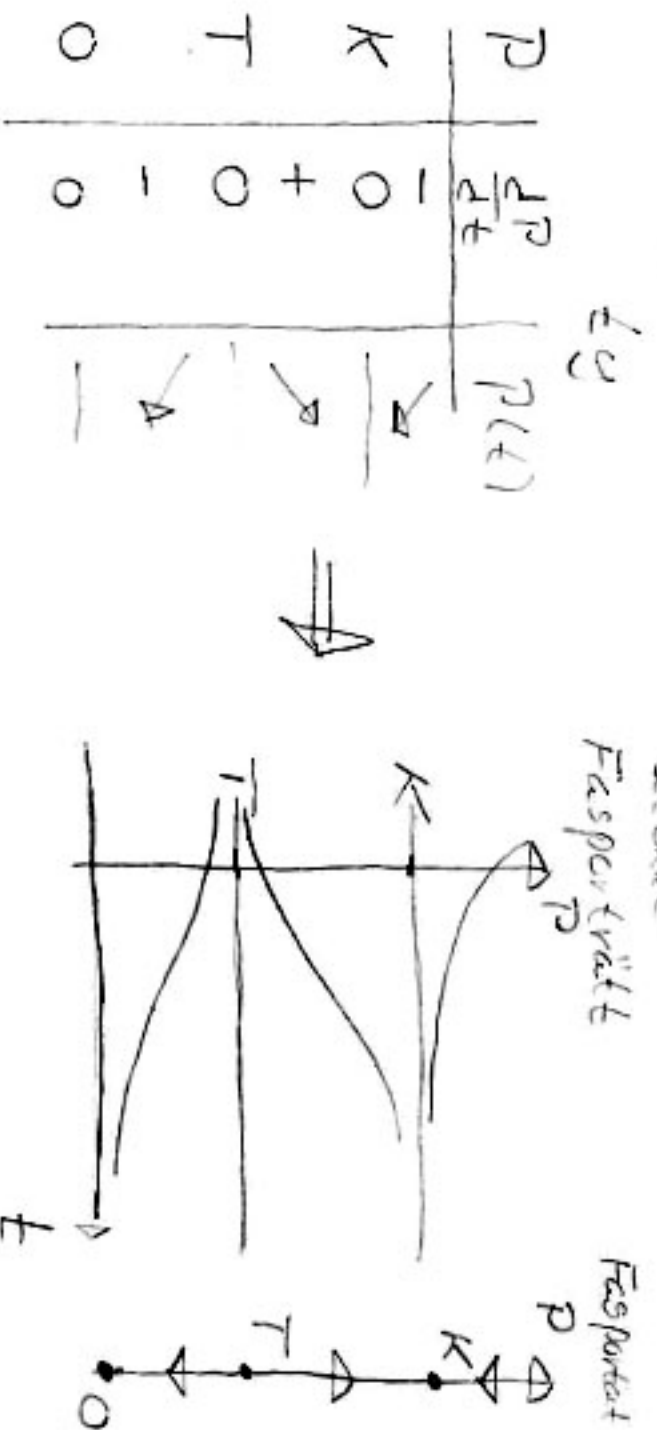
(i) $\Rightarrow P'(t) < 0$ för $0 < P < T$ (ii) $\Rightarrow P'(t) < 0$ för $P > K$ ($K > T$)(iii) $\Rightarrow P'(t) > 0$ för $T < P < K$

Delta uppfylls t.ex. av

$$\frac{dP}{dt} = -P(P-T)(P-K)$$

utskat

Fasporträtt



Fasporträtt

9. a) $\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ är en stationär lösning om

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{---}$$

$$\begin{cases} x_0 + 2z_0 + 3 = 0 \\ -2y_0 + 5z_0 - 1 = 0 \\ 3z_0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -3 \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

b) Homogen lösning bestäms.

Eftersom $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ är triangulär ser vi att

eigenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ och $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1$ svarar mot $\bar{K}_1 \neq \bar{0}$ s.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{K}_1 = \bar{0}, \quad \text{L.ex. } \bar{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$\lambda_2 = -2$ svarar mot $\bar{K}_2 \neq \bar{0}$ s.e.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \bar{K}_2 = \bar{0}, \quad \text{L.ex. } \bar{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$\lambda_3 = 3$ svarar mot $\bar{K}_3 \neq \bar{0}$ s.e.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{K}_3 = \bar{0}, \quad \text{L.ex. } \bar{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Allmän lösning: $\bar{X}_g(t) = \bar{X}_h(t) + \bar{X}_p(t) = \left\{ \begin{matrix} \text{L.ex. } \bar{X}_p = \bar{X}_0 \end{matrix} \right\}$

$$= C_1 \bar{X}_1 + C_2 \bar{X}_2 + C_3 \bar{X}_3 + \bar{X}_0$$

c) Låt $\bar{X}(t)$ vara den lösning som förs de $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$.

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Vi ser att}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{X}(t) = \bar{X}_0 \quad \text{och}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\bar{X}(t)| \neq \text{instit} \bar{X}_0$$

~~$\bar{X}_1$~~

$$\bar{X}_g(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en stationär lösning, och är instabil

10. Vi har följande

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 < x < \pi \quad (3)$$

Sök lösning på formen $u(x, t) = \bar{X}(x) \bar{T}(t)$

$$(1) \text{ då } \bar{X}'' \bar{T} = \bar{X} \bar{T}' \Leftrightarrow \frac{\bar{X}''}{\bar{X}} = \frac{\bar{T}'}{\bar{T}} = \text{konstant}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X}'' - \lambda \bar{X} = 0 & (4) \\ \bar{T}' - \lambda \bar{T} = 0 & (5) \end{cases}$$

(2) övergår i $\bar{X}(0) \bar{T}(t) = \bar{X}(\pi) \bar{T}(t) = 0, t > 0$,
som har icke-trivial lösning om

$$\bar{X}(0) = 0 \quad (6) \quad \text{och} \quad \bar{X}(\pi) = 0 \quad (7).$$

(4), (6) & (7) bestämmer $\bar{X}$ och möjliga λ

Om $\lambda > 0$ så (4), (6) & (7) $\Rightarrow \bar{X}(x) \equiv 0$, das trivial lösning
[Se uppgift 6]

För $\lambda = -\lambda^2 < 0$ fås $\bar{X}'' + \lambda^2 \bar{X} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$

$$(6) \Rightarrow A = 0, \text{ så } \bar{X}(x) = B \sin \lambda x$$

$$(7) \Rightarrow B \sin \lambda \pi = 0. \text{ Icke-trivial lösning } (B \neq 0)$$

$$\text{Om } \sin \lambda \pi = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Icke-trivial lösning till (4), (6) & (7) om $\lambda^2 = -n^2$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$, $\bar{X}_n(x) = B_n \sin nx$.

$$\text{För } \lambda^2 = -n^2 \text{ så (5) } \Leftrightarrow \bar{T}' + n^2 \bar{T} = 0 \Leftrightarrow \bar{T}(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

$$\text{Vi får } u_n(x, t) = \bar{X}_n \bar{T}_n = b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

Så u uppfyller (1) och (2) för $n = 1, 2, 3, \dots$, $\forall b_n$.

Vi ser att $n = 1$ och $b_1 = 1$, $u(x, t) = e^{-t} \sin x$.

Uppg 10 (3).

$$\text{Svar: } u(\frac{\pi}{2}, 2) = e^{-2} \sin \frac{\pi}{2} = e^{-2}$$

11. Vi byter till polära koordinater:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos \theta - r (\sin \theta) \theta' \\ r' \sin \theta + r (\cos \theta) \theta' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix}$$

$$\det A = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \quad \text{så}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ -\frac{1}{r} (x' \sin \theta + y' \cos \theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r' = \frac{1}{r} (x x' + y y') \\ \theta' = \frac{1}{r^2} (-y x' + x y') \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{De givna ekvationerna} \\ \text{övergår därför i} \end{array}$$

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{r} (x(x-y-x(x^2+y^2)) + y(x+y-y(x^2+y^2))) \\ &= \frac{1}{r} (x^2 - xy - x^3 - y^3 + xy + y^2 - y^3 - y^2(x^2+y^2)) \\ &= -\frac{1}{r} (x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)) = -\frac{1}{r} (r^2 - r^4) = r - r^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta' &= -\frac{1}{r^2} (-y(x-y-x(x^2+y^2)) + x(x+y-y(x^2+y^2))) \\ &= \frac{1}{r^2} (-xy + y^2 + xy(x^2+y^2) + x^2 - xy - x^2y - xy(x^2+y^2)) \\ &= \frac{1}{r^2} (x^2 + y^2) = 1 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{dus:}} \quad \begin{cases} r' = r - r^3 \\ \theta' = 1 \end{cases} \quad \text{Vi ser att } \begin{cases} r(t) \equiv 1 \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad \text{är en}$$

en lösning, som är periodisk.

$$\underline{\text{Svar:}} \quad T_{\text{ex}} \quad \begin{cases} r(t) \equiv 1 \\ \theta(t) = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

(12.)

Antag att $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

För ett godtyckligt positivt heltal m gäller att

$$f(x) \sin mx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \sin mx$$

och att

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \sin mx \, dx$$

Om vi antar att H.L. kan integreras termvis får

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx.$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} \left[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x \right], \text{ så}$$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \, dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sin(2mx)}{2m} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, & n=m \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{(n+m)} \right]_0^{\pi} = 0 & n \neq m \end{cases}$$

Alltså gäller att, för godtyckligt heltal $m > 0$,

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin mx = b_m \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ dvs}$$

Svar: $b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$