

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 23/8 2005 08.00-13.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.

Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Lycka till!

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet
$$\frac{dy}{dx} + (x-1)e^{xy} = 0$$

$$y(1) = \ln \frac{1}{2}$$
.

Ange även lösningens existensintervall.

2. Bestäm alla lösningar $y(x)$ till ekvationen $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = e^{x^2}$.
Tips: Gör ansatsen $y(x) = u(x)e^{x^2}$.

3. Bestäm och klassificera alla stationära lösningar till systemet
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 4y + 4 \\ \frac{dy}{dt} = x - y + 1 \end{cases}$$
.

4. Låt $f(t)$ vara signalen $f(t) = \square(t+1) - \square(t-1) + \square(t-2)$, $-1 < t < 3$, där $\square(t)$ är Heavieside-funktion ("the unit step function") och $\delta(t)$ är en Dirac-puls.

- a) Beskriv signalen med lämplig figur eller i ord. (1p)
b) Beräkna Fouriertransformen av f . (2p)

5. Låt $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ uppfylla systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ och initialvillkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Skär lösningskurvan linjen $y = 0$ för något $t > 0$?

6. För vilka värden på konstanten λ finns det icke-triviala lösningar till randvärdesproblemet $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$? Lös problemet i dessa fall.

B-uppgifter

7. Lös initialvärdesproblemet $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
8. $P(t) \geq 0$ betecknar storleken på en viss djurpopulation vid tiden t . Man har observerat följande egenskaper hos populationen:
- (i) Små populationer överlever inte, närmare bestämt finns det en konstant $T > 0$ sådana att om $0 < P(t) < T$ så minskar populationen i storlek.
 - (ii) Det finns också en övre gräns: det finns en konstant K , $K > T$ sådan att om $P(t) > K$ så minskar populationen också i storlek.
 - (iii) Så länge $T < P(t) < K$ växer populationen i storlek.

Populationsstorleken och dess förändring antas variera kontinuerligt över tiden.

Föreslå en differentialekvation för $P(t)$, och verifiera på lämpligt sätt att den föreslagna modellen har egenskaperna (i) – (iii). Skissera också modellens fasporträtt.

9. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = 1 - x^2 \\ y' = 2 - 5y + 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

- a) Bestäm systemets stationära lösningar. (1p)
 - b) Ange systemets allmänna lösning. (2p)
 - c) Avgör om de stationära lösningar du funnit är stabila eller ej. (1p)
- (Stationära lösningar och stabilitet definieras analogt med plana system)

10. $u(x, t)$ beskriver temperaturen i Celsius-grader i en tunn tråd, ℓ längdenheter lång, i

punkten x vid tiden $t > 0$. Man vet att u uppfyller $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \ell$, $t > 0$.

Trådens ändpunkter $x = 0$ och $x = \ell$ ligger i smältande is. Vid $t = 0$ ges temperaturen i x av $f(x) = \sin x$. Bestäm temperaturen i trådens mittpunkt vid tiden $t = 2$.

11. Finn en icke-trivial periodisk lösning till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Tips: Byt till polära koordinater.

12. Man vet att funktionen $f(x)$ kan uttryckas i en sinusserie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ på intervallet $(0, \pi)$. Härled det uttryck som, givet f , bestämmer koefficienterna b_n .