

Modelltenta 5B1212 HT03

SVAR

1. a) $u(x) = -x \ln x + Cx$

b) $y(x) = \frac{1}{x(C - \ln x)}$ ($y(x) \equiv 0$ är också en lösning som inte hittas med substitutionen).

2. OBS: Tryckfel i uppgiften. $N_g(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ skall det vara (inget "t").

a) Bevis: $g(r) = 0 \Leftrightarrow r = r - \frac{g(r)}{g'(r)} \Leftrightarrow N_g(r) = r$

b) Ett tillräckligt villkor för stabilitet är att $\left| \frac{dN_g}{dx}(r) \right| < 1$.

Derivering och utnyttjande av att $g(r) = 0$ ger att $\frac{dN_g}{dx}(r) = 0$.

3. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $(1, -1)$ är en sadelpunkt (och därmed instabil). $(-1, 1)$ är en instabil spiral. Inga andra stationära lösningar.

5. a) $C_f(x) = \frac{p}{4} - \frac{2}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x$

b) $C_f(-2) = C_f(2) = f(2) = 1$

6. $u(x, y) = e^{x-y}$

7. a) -- b) Reduktion av ordning ger $y_2(x) = x \ln x$

c) Skriv först om ekvationen på standardform (koefficient = 1 framför högsta ordningstermen): $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$. Variation av parametrar ger $y_p = x^2$

Svar: $y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + x^2$

8. a) $x(t) \equiv e^M$ är enda stationära lösning, och den är stabil. (Figur skall ritas!)

b) För $1 < x \ll M$ får vi approximativt att $x'(t) \approx rx \Rightarrow x(t) \approx x_0 e^{rt}$.
Fördubbling på ett år (t har enhet år) ger att $r = \ln 2$.

c) $x(t) = \exp(M + (\ln x_0 - M)e^{-\frac{r}{M}t})$

9. a)
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x\sqrt{y^2 + 1} \end{cases}$$

b) $(0,0)$ som är en sadelpunkt (och därmed instabil) är enda kritiska punkten.

c) Löses genom att vektorfältet pekar i positiv x -riktning och positiv y -riktning i första kvadranten. En kurva som startar i $(1,1)$ löper då för $t > 0$ endast igenom punkter där $x > 1$ och $y > 1$.

10. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2npt) \sin(np x)$ där

$$b_n = \frac{1}{np} \int_0^1 \sin np x \, dx = \frac{1}{n^2 p^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ \frac{2}{n^2 p^2} & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}.$$