

Modelltenta 5B1212 HT 03

För betyg 3 krävs minst 12 poäng på del A (inklusive A-bonus) samt minst 4 poäng på del B (utan bonus).

För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på del B (inklusive B-bonus).

Skrivtid: 5 timmar.

Inga hjälpmedel

A-del. Sex uppgifter om 3 poäng vardera.

1. a) Lös differentialekvationen $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1$, $x > 0$. (2p)

b) Lös differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2$, $x > 0$ genom att genomföra substitutionen $y = \frac{1}{u}$ och sedan utnyttja resultatet i a)-uppgiften. (1p)

2. För att numeriskt beräkna en approximativ lösning till en ekvation $g(x) = 0$, där g är en deriverbar funktion, kan man använda sig av Newton-Raphsons metod. Man bestämmer en första approximation r_0 genom t.ex. inspektion och beräknar sedan

iterativt $r_{n+1} = N_g(r_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, där $N_g(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Om r_0 ligger tillräckligt nära en rot r till $g(x) = 0$ gäller då att $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$.

a) Visa att om $g'(r) \neq 0$ gäller att r är ett nollställe till $g(x)$ om och endast om r är en fixpunkt till N_g . (1p)

b) Visa också, under antagandet att g är två gånger deriverbar, att r i sådana fall är en stabil fixpunkt till N_g . (2p)

3. Bestäm alla funktioner $x(t)$ och $y(t)$ sådana $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (3p)

4. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} x' = 1 + xy \\ y' = x + y \end{cases}$. Bestäm deras typ och avgör om möjligt deras stabilitet. (3p)

5. a) Beräkna Fourier-cosinus serien $C_f(x)$ till $f(x) = x/2$ på intervallet $(0, p)$. (2p)

b) Ange $C_f(-2)$. (1p)

6. Bestäm en funktion $u(x, y)$ som uppfyller att $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ och $u(0, y) = e^{-y}$. (3p)

B-del. Fyra uppgifter om 4 poäng vardera.

7. a) Verifiera att $y_1 = x$ är en lösning till $x^2 y'' - xy' + y = 0$. (1p)

b) Bestäm en andra linjärt oberoende lösning till $x^2 y'' - xy' + y = 0$ giltig för $x > 0$. (1p)

c) Bestäm den allmänna lösningen till $x^2 y'' - xy' + y = x^2$, $x > 0$. (2p)

8. Du vill modellera en viss djurpopulations utveckling, och överväger att använda följande modell i kontinuerlig tid,

$$\begin{cases} x'(t) = rx(1 - \frac{\ln(x)}{M}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

där $x(t) \geq 1$ är antalet individer efter t år, och r och M är positiva konstanter.

a) Gör en riktningsfältsanalys av modellen och bestäm eventuella stationära lösningar och deras stabilitet. (1p)

b) Bestäm konstanten r så att små populationer approximativt fördubblas på ett år. (1p)

c) Lös initialvärdesproblemet. (2p)

9. a) Skriv differentialekvationen $x'' - 2x\sqrt{(x')^2 + 1} = 0$ som ett första ordningens system. (1p)

b) Bestäm systemets kritiska punkter och klassificera dem med avseende på stabilitet. (1p)

c) Visa att den lösning $x(t)$ som bestäms av initialvärdena $x(0) = 1$ och $x'(0) = 1$ uppfyller att $x(t) > 0$ för $t > 0$. (2p)

10. Bestäm en funktion $u(x, t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} 4u''_{xx} = u''_{tt} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u'_t(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1 \end{cases} \quad (4p)$$