Lösningsförslag till tentamen i Diff & trans III 2009-02-02

1. Ekvationen är separabel. Integrering ger

$$y^2 = \frac{1}{C - x^2}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = 1$. Eftersom $y(0) > 0$ måste vi ha den positiva roten, dvs

$$y = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}.$$

Denna lösningen är definierad för $|x| < 1$.

2. Sätt $y(x) = u(x)e^{\sin x}$. Insättning av y, y' och y'' i ekvationen ger efter förenkling

$$u'' - u = x.$$

Denna ekvationen har den allmänna lösningen $u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$. Alltså har vi att

$$y = (c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x)e^{\sin x}$$

är den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen.

3. Se uppgift 11.2.1 på sidan 407 i Zill-Cullen. För att skissa grafen av $S(x)$, se diskussionen på sidan 406. Tänk på att $S(0) = 1/2, S(\pi) = 1/2, S(2\pi) = 1/2$ enligt sats 11.2.1 på sidan 405.

4. Vi har

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \right]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

om $\omega \neq 0$. $\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{1} dt = 2$.

5. Vi ser att $y_1 = x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Man ser också att $y_2 = x^2$ är ytterliggare en lösing (eller så använder man y_1 och räknar fram en; reduktion av ordning). Det är klar att y_1 och y_2 är linjärt oberoende på intervallet $(0, \infty)$. Wronski-determinanten $W(y_1, y_2) = x^2$.

Vi skriver den ursprungliga ekvationen på standardform

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 1.$$

Variation av parametrar ger oss nu en partikulärlösning

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot 1}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 \cdot 1}{W(y_1, y_2)} dx = x^2 \ln x - x^2.$$

Alltså är den allmänna lösningen (notera att funktionerna $-2/x$ och $2/x^2$ är kontinuerliga på intervallet $(0, \infty)$)

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \ln x$$

där c_1, c_2 är konstanter.

6. På matris form kan systemet skrivas

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$, med motsvarande egenvektorer $K_1 = \binom{2}{1}$ respektive $K_2 = \binom{1}{1}$. Således är

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

två linjärt oberoende lösningar till det motsvarande homogena systemet.

Låt

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Vi har

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En partikulärlösning fås genom

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}.$$

Alltså, lösningarna till systemet är på formen

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}.$$

7. Gör vi som i Zill-Cullen (sid. 446) fås

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\sin x + \sin 8x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx.$$

Detta ger att $A_1 = 1, A_8 = 1$ och alla andra $A_n = 0$. Vidare ger villkoret $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ att alla $B_n = 0$. Således, lösingen är

$$u(x,t) = \cos t \sin x + \cos 8t \sin 8x.$$

8. Vi låter $x_1(t), x_2(t)$ vara mängden salt i tank A respektive tank B och sätter upp systemet som på sid. 107 i Zill-Cullen.

$$\frac{dx_1}{dt} = 15 + x_2 - 4x_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - 4x_2$$

Systemet har den allmänna lösningen (tänk på att $x_1 = 5, x_2 = 5$ måste vara en lösning)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vid tiden $t = 0$ har vi $x_1(0) = 0$ och $x_2(0) = 20$. Detta ger $c_1 = 5/4$ och $c_2 = -25/4$. Alltså

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{25}{4}e^{-6t} + 5 \\ \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{25}{2}e^{-6t} + 5 \end{pmatrix}.$$

9. a) När $\varepsilon = 0$ är systemet linjärt. Koefficientmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena $\pm i$. Alltså är den kritiska punkten ett center.

b+c) Metoden med att titta pa jabobi-matrisen fungerar ej; matrisen har egenvärdena $\pm i$. Vi inför polära koordinater. Sätt $r^2 = x^2 + y^2$. Derivering m.a.p. t ger

$$\begin{aligned} 2rr' &= 2xx' + 2yy' = 2x(y + \varepsilon x(x^2 + y^2)) + 2y(-x + \varepsilon y(x^2 + y^2)) \\ &= 2\varepsilon(x^2r^2 + y^2r^2) = 2\varepsilon r^4 \end{aligned}$$

dvs

$$r' = \varepsilon r^3.$$

Om vi tar ett begynnelsevillkor $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, och låter $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, ser vi att lösningen till (den separabla) ekvationen ovan, med $r(0) = r_0$ är

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2r_0^2 \varepsilon t}}.$$

Vad händer nu när $t > 0$? I fallet $\varepsilon = 1$ ser vi att $r(t) \to \infty$ då $t \to (\varepsilon/(2r_0^2))^-$, dvs den kritiska punkten är instabil; fallet $\varepsilon = -1$ ger att $r(t) \to 0$ då $t \to \infty$, dvs den kritiska punkten är asymptotiskt stabil.