KTH Matematik

Tentamen i Diff & trans III, SF1637, den 2 februari 2009

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna 1 – 6 ger vardera maximalt 3 poäng; uppgifterna 7 – 9 ger vardera maximalt 4 poäng. För betyg E (godkänt), D, C, B, A krävs minst 15, 18, 21, 24 repektive 27 poäng. Om 13 eller 14 poäng uppnås finns möjlighet att komplettera inom fyra veckor. Kontakta i så fall kursledaren.

Den som är godkänd på lappskrivning nummer i har automatiskt full poäng på uppgift nummer i.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$y' = xy^3, \quad y(0) = 1$$
samt ange för vilka x som lösningen är definierad.

2. Bestäm alla lösningar till ekvationen
$$y'' - 2\cos(x)y' + (\sin x + \cos^2 x - 1)y = xe^{\sin x}.$$
Ledning: gör substitutionen $y(x) = u(x)e^{\sin x}$.

3. Bestäm Fourierserien $S(x)$ till funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
på intervallet $(-\pi, \pi)$. Skissa också grafen $y = S(x)$ på intervallet $(-\pi, 3\pi)$. Markera speciellt $S(0), S(\pi), S(2\pi)$ i grafen.

4. Bestäm Fouriertransformen av funktionen
$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$
Vad är $\widehat{f}(0)$?

5. Bestäm den allmänna lösningen på intervallet $(0, \infty)$ till ekvationen
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2.$$
Ledning: gissa en lösning till den motsvarande homogena ekvationen.

Vänd!

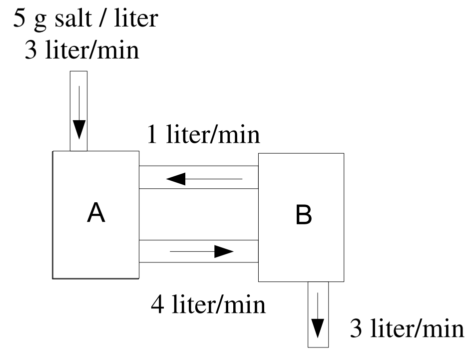

FIGURE 1. Tankarna i uppgift 8

6. Hitta alla lösningar till systemet

$$\frac{dx}{dt} = 2y(t) + e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = -x(t) + 3y(t) - e^t$$

7. Lös randvärdesproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \sin x + \sin 8x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

8. Betrakta de två tankarna A och B i figuren. Initialt finns det 1 liter saltlösning i tank B med kocentrationen 20 gram salt per liter, och i tank A finns 1 liter rent vatten. En saltlösning innehållande 5 gram salt per liter pumpas in i tank A . Tankarna är kopplade enligt figuren. Innehållet i tankarna blandas väl. Bestäm mängden salt i tank A och B vid tiden $t > 0$.

9. Betrakta systemet

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon x(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + \varepsilon y(x^2 + y^2)$$

där ε är en konstant. Vi noterar att $(0,0)$ är en kritisk punkt för varje val av konstanten ε.

a) Klassificera den kritiska punkten $(0,0)$ då $\varepsilon = 0$. (1p)

b) Låt nu $\varepsilon = 1$. Är den kritiska punkten $(0,0)$ stabil eller instabil? (Ledning: Byt till polära koordinater. Titta på $r^2 = x^2 + y^2$.) (2p)

c) Om $\varepsilon = -1$, är $(0,0)$ stabil eller instabil? (1p)

Lycka till!