KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i Diff & trans III, SF1637, den 21 oktober 2009

1. Vi har en autonom ekvation. I högerledet har vi $f(y) = (y-2)\arctan y$ som har nollställena, dvs de kritiska punkterna, $y = 2$ och $y = 0$. Eftersom vi har begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ är vi intresserade av intervallet $(0, 2)$. I detta intervall är $f(y) < 0$, dvs lösningen $y(t)$ uppfyller $y'(t) = f(y(t)) < 0$. Eftersom $f(y)$ och $f'(y)$ är kontinuerliga följer det från existens- och entydighets-satsen att vi ej kan skära de stationära lösningarna $y = 2$ och $y = 0$. Alltså, lösningen $y(t)$ är avtagande på intervallet $(-\infty, \infty)$, $0 < y(t) < 2$, $y(0) = 1$, och $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ och $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 2$. Rita nu en figur. (Se också avsnittet 2.1.2 i Zill-Cullen).

2. Vi löser först den homogena ekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Den karaktäristiska ekvationen blir $r^2 - 2r + 1 = 0$, vilket ger $r = 1$ (dubbelrot). Alltså är den allmänna lösningen

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Låt $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ och $f(x) = e^x/x$. Vi har Wronskideterminanten $W(y_1, y_2) = e^{2x}$. En partikulärlösning fås genom

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2 \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$= -e^x \int dx + xe^x \int \frac{1}{x}dx = -xe^x + xe^x \ln x = xe^x(\ln x - 1)$$

Således, den allmänna lösningen är

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + xe^x(\ln x - 1).$$

3. För att hitta de kritiska punkterna löser vi systemet

$$xy^2 + x = 0$$

$$x^2 + 2y - 4 = 0$$

Den första ekvationen kan skrivas $x(y^2 + 1) = 0$ vilket ger att vi måste ha $x = 0$. Sätter vi in $x = 0$ i den andra ekvationen fås $2y - 4 = 0$, dvs $y = 2$. Det finns alltså endast en kritisk punkt, $(0, 2)$.

Vi har Jacobimatrisen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+1 & 2xy \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$J(0,2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom denna matris har egenvärdena 2 och 5, följer det att den kritiska punkten $(0,2)$ är en instabil nod.

4. Detta är exempel 3.2 i kompendiet om Fouriertransformen.

5. Vi löser först det homogena systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Matrisen ovan har egenvärdena $4 \pm 3i$. Vektorn $\mathbf{K}_1 = \binom{1}{i}$ är en komplex egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda = 4 - 3i$. Således har vi en komplexvärd lösning

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}_1 e^{(4-3i)t} = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ i \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Realdelen och imaginärdelen utgör två reella och linjärt oberoende lösningar:

$$\mathbf{X}_1 = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = e^{4t} \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

Vi ser lätt att

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen. Således är den allmänna lösningen

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_p = e^{4t} \begin{pmatrix} c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t \\ c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + 1 \\ 0 &= c_2 \end{aligned}$$

dvs $c_1 = -1, c_2 = 0$. Slutligen,

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_p = e^{4t} \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är lösningen till begynnelseväresproblemet.

6. Genom att göra som i Zill-Cullen (sid 443-444) fås att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

där A_n är konstanter som bestäms av begynnelsevillkoret $u(x,0) = 1,\ 0 < x < \pi$. Detta ger att vi behöver

$$1 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$$

dvs vi måste utveckla den konstanta funktionen $f(x) = 1$ i en sinusserie på intervallet $(0,\pi)$. Vi får att (se övning 11.3.11 i Zill-Cullen)

$$A_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right).$$

Således, vi har fått lösningen

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

7. Vi ser att $y_1 = x$ är en lösning till den homogena ekvationen

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Med hjälp av reduktion av ordning fås ytterliggare en lösning, $y_2 = 1/x$. Vi skriver den ursprungliga ekvationen på standard form

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 72x^3.$$

Låt $f(x) = 72x^3$. Vi har $W(y_1, y_2) = -2/x$. En partikulärlösning fås nu på precis samma sätt som i uppgift 2 ovan. Man får

$$y_p = 3x^5.$$

Således, den allmänna lösningen är

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + 3x^5.$$

8. Vi har skalärprodukten

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Villkoren på ϕ_k kan skrivas: $(\phi_k, \phi_l) = 0$ om $l \neq k$ och $(\phi_k, \phi_k) = 1$. Räknereglerna för skalärprudukten samt antagandena på ϕ_k ger

$$\int_a^b (f(x))^2 \, dx = (f, f) = \left(\sum_{k=1}^n c_k \phi_k, \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right)$$

$$= c_1 \left(\phi_1, \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) + c_2 \left(\phi_2, \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) + \ldots + c_n \left(\phi_n, \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right)$$

$$= c_1(\phi_1, c_1\phi_1) + c_2(\phi_2, c_2\phi_2) + \ldots c_n(\phi_2, c_n\phi_n)$$

$$= c_1^2(\phi_1, \phi_1) + c_2^2(\phi_2, \phi_2) + \ldots c_n(\phi_n, \phi_n) = \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

9. Temperaturen $T(t)$ uppfyller den linjära ekvationen

$$T' = k(T_u - T)$$

där T_u är ungstemperaturen och där k är en konstant. Detta ger

$$T(t) = T_u + Ce^{-kt}.$$

Vi vet att

$$20 = T(0) = T_u + C$$
$$50 = T(1) = T_u + Ce^{-k}$$
$$75 = T(2) = T_u + Ce^{-2k}$$

Den första ekvationen ger $C = 20 - T_u$. Detta insatt i den andra ekvationen ger

$$e^{-k} = \frac{50 - T_u}{20 - T_u}$$

Insatt i den tredje ekvationen fås

$$75 = T_u + (20 - T_u)\frac{(50 - T_u)^2}{(20 - T_u)^2} = T_u + \frac{(50 - T_u)^2}{20 - T_u}$$

vilket ger

$$(75 - T_u)(20 - T_u) = (50 - T_u)^2,$$

dvs

$$T_u^2 - 95T_u + 75 \cdot 20 = T_u^2 - 100T_u + 50^2$$

vilket slutligen ger

$$5T_u = 50^2 - 75 \cdot 20 = 1000$$

dvs $T_u = 200°C$.

10. I polära koordinater (se Zill-Cullen sid 368) kan systemet skrivas

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -1$$

Den andra ekvationen ger direkt att $\theta = -t + C$. Högerledet i den första ekvationen kan skrivas $r(1-r)(1+r)$. Vi har alltså de kritiska punkterna $r = 0, r = 1$ och $r = -1$. Eftersom r är ett avstånd betraktar vi bara $r \geq 0$. Det är lätt att se att lösningen $r(t)$ till den första ekvationen, givet ett begynnelsevillkor $r_0 = r(0) > 0$, uppfyller $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$. Således, givet ett begynnelsevillkor $(\theta(0), r(0)) = (\theta_0, r_0)$, där $r_0 > 0$, så konvergerar lösningen mot den periodiska lösningen $r = 1$, $\theta = -t + \theta_0$.