**KTH Matematik**

# Tentamen i Diff & trans III (SF1637) den 21 oktober 2009

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna 1 – 10 ger vardera maximalt 3 poäng. Fullständiga lösningar krävs.

För betyg E: minst 14 poäng
För betyg D: minst 17 poäng
För betyg C: minst 20 poäng, varav minst 3 poäng på B-delen
För betyg B: minst 22 poäng, varav minst 6 poäng på B-delen
För betyg A: minst 25 poäng, varav minst 8 poäng på B-delen

Om 13 poäng uppnås finns möjlighet att komplettera inom fyra veckor. Kontakta i så fall kursledaren.

Den som är godkänd på lappskrivning nummer $i$ har automatiskt full poäng på uppgift nummer $i$.

## Del A

**1**. Låt $y(t)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = (y(t) - 2)\arctan(y(t)), \quad y(0) = 1.$$

Skissa grafen av $y(t)$. Motivera ditt svar.

**2**. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

**3**. Hitta alla kritiska punkter till systemet

$$\frac{dx}{dt} = xy^2 + x$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2 + 2y - 4$$

samt klassificera dem.

**4**. Låt

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{för } t \geq 0 \\ 0 & \text{för } t < 0. \end{cases}$$

a) Bestäm Fouriertransformen till $f(t)$.

b) Uttryck $f(t)$ som en Fourierintegral.

c) Bestäm Fourierintegralens värde för varje $t$.

**5**. a) Bestäm lösningen till systemet

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y - 4$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4y - 3$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 0,\ y(0) = 0$.

b) Verifiera att ditt svar verkligen är en lösning till systemet och att den uppfyller begynnelsevillkoret.

**6**. Lös randvärdesproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 1, \quad 0 < x < \pi.$$

## Del B

**7**. Hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 72x^5$$

på intervallet $(0, \infty)$.

**8**. Antag att funktionerna $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ är kontinuerliga på intervallet $[a,b]$ och sådana att

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{om } n = m \\ 0 & \text{om } n \neq m \end{cases}$$

En viss funktion $f(x)$ kan skrivas på formen $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$, där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är konstanter. Visa att

$$\int_a^b (f(x))^2\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

**9**. En ugn är uppvärmd och håller en konstant temperatur $T_u$ °$C$. En termometer sätts in i ugnen och avläses genom glaset i ugnsluckan. Termometern uppvärms i ugnen och visar en temperatur $T(t)$ som stiger med en hasighet proportionell mot temperaturskillnanden mellan termometerns och ugnens temperatur, i enighet med Newtons lag för uppvärmning. När termometern sätts in i ugnen visar den 20 °$C$. Efter en minut visar den 50°$C$, och efter två minuter visar den 75 °$C$. Bestäm ugnens temperatur.

**10**. Vi betraktar det autonoma systemet

$$\frac{dx}{dt} = x + y - x(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2)$$

Visa att en lösning $(x(t), y(t))$ som uppfyller begynnelsevillkoret $(x(0))^2 + (y(0))^2 \neq 0$ konvergerar mot en periodisk lösning.

**Lycka till!**