KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamen i Diff & trans III, SF1637, den 12 januari 2010

1. Detta är Exempel 2 (sid. 72-73) i Zill-Cullen, 7ed.

2. Vi använder reduktion av ordning för att hitta ytterliggare en lösning $y_2(x)$. Gör ansatsen $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$. Insatt i ekvationen fås

$$e^x(xu''(x) - u'(x)) = 0,$$

dvs, vi vill lösa ekvationen

$$xu''(x) - u'(x) = 0.$$

Låter vi $w(x) = u'(x)$ får vi ekvationen

$$xw'(x) - w(x) = 0$$

vilket ger $w(x) = Ax$, så $u(x) = Bx^2 + C$. Således är

$$y(x) = c_1e^x + c_2x^2e^x$$

den allmänna lösningen till den givna ekvationen.

3. För att hitta de kritiska punkterna löser vi systemet

$$y - 1 = 0$$
$$x^2 - y = 0$$

Den första ekvationen ger att vi måste ha $y = 1$. Sätter vi in $y = 1$ i den andra ekvationen fås $x^2 - 1 = 0$, dvs $x = \pm 1$. Det finns alltså två kristiska punkter: $(\pm 1, 1)$.

Vi undersöker de kritiska punkterna. Vi har Jacobimatrisen

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

I punkten $(1, 1)$ får vi matrisen

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena 1 och -2. Således är den kritiska punkten $(1, 1)$ en sadel, dvs instabil. I punkten $(-1, 1)$ får vi matrisen

$$J(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena $-1/2 \pm i\sqrt{7}/2$. Således är den kritiska punkten $(-1, 1)$ en stabil spiralpunkt.

4. a) Detta är väsentligen Exempel 3.1 i kompendiet om Fouriertransformen. Vi får

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt = \frac{2\sin\omega}{\omega}, \omega \neq 0$$

och $\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{1} dt = 2$.

b) Enligt Sats 1 i kompendiet uppfyller Fourierintegralen till $f(t)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \quad \text{för alla } t.$$

Eftersom f är kontinuerlig i $t = 0$, och $f(0) = 1$, har vi alltså

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega} d\omega = 1,$$

dvs

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega = \pi.$$

5. Den allmänna lösningen till det givna systemet är $x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$ och $y(t) = -c_1\sin(t) + c_2\cos(t)$. Med andra ord, alla lösningar är periodiska, speciellt en som går genom punkten $(1, 0)$.

6. Genom att göra som i Zill-Cullen (sid 443-444) fås att

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

där A_n är konstanter som bestäms av begynnelsevillkoret $u(x, 0) = 1,\ 0 < x < 1$. Detta ger att vi behöver

$$1 = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$$

dvs vi måste utveckla den konstanta funktionen $f(x) = 1$ i en sinusserie på intervallet $(0, 1)$. Vi får

$$A_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1 - (-1)^n}{n}\right).$$

Således, vi har fått lösningen

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} e^{-2n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

7. För att bestämma den allmänna lösningen till en homogena linjär tredje ordningens ekvation behöver vi tre linjärt oberoende lösningar. Eftersom ekvationen är linjär och homogen kan vi använda superpositionsprincipen: om $y_p(x)$ och $y_q(x)$ är lösningar så är också $c_1y_p(x) + c_2y_q(x)$ en lösning för varje val av konstanter c_1, c_2.

Således är $\frac{1}{5}y_1(x) = x^2$ en lösning. Vidare, $\frac{1}{7}y_3(x) - \frac{1}{7}x^2 = x^3$, och $\frac{1}{2}y_4(x) - \frac{1}{2}x^2 = x$ är lösningar. Det är klart att funktionerna x, x^2 och x^3 är linjärt oberoende. Således ges den allmänna lösningen av

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Vi har $y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$ och $y''(x) = 2c_2 + 6c_3x$. Begynnelsevillkoren ger $2 = y(1) = c_1 + c_2 + c_3$, $3 = y'(1) = c_1 + 2c_2 + 3c_3$, $4 = y''(1) = 2c_2 + 6c_3$, som har lösningen $c_1 = 2, c_2 = -1$ och $c_3 = 1$. Således,

$$y(x) = 2x - x^2 + x^3$$

är den unika lösningen.

8. För varje $n = 1, 2, \ldots, N$ får vi, genom att utnyttja villkoren på funktionerna $\phi_1(x), \ldots, \phi_N(x)$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^N c_k\phi_k(x)\right)\phi_n(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^N \left(c_k \int_a^b \phi_k(x)\phi_n(x)dx\right) = c_n.\end{aligned}$$

9. Vi skriver ekvationen som ett plant autonomt system genom att låta $y(t) = x'(t)$:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -4x - 4y + y^3.\end{aligned}$$

Vi undersöker om den kritiska punkten $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil. Vi har Jacobimatrisen

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena -2 och -2 (multipelt egenvärde) vet vi alltså att den kritiska punkten $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil. Således, $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ då $t \to \infty$ om $(x(0), y(0))$ är tillräckligt nära $(0, 0)$. Speciellt gäller alltså att $x(t) \to 0$ om $x(0)$ och $y(0)$ är tillräckligt nära 0.

10. a) Vi får ekvationen

$$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{40}\right) - c.$$

b) Vi söker de kritiska punkterna, dvs de punker där funktionen

$$g(y) = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{40}\right) - c$$

blir noll. Vi får

$$\frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{40}\right) - c = 0 \Leftrightarrow y = 20 \pm 4\sqrt{25 - 10c}.$$

För $c = 5/2$ har vi en jämviktslösning $y(t) = 20$, och för $c > 5/2$ är $g(y)$ negativ för alla y. Alltså, $c = 5/2$ är det kritiska värdet.

c) För $c < 5/2$ har vi de två jämviktslösningarna $y(t) = 20 \pm 4\sqrt{25 - 10c}$. Vi undersöker vilken som som är stabil genom att undersöka tecknet på $g(y)$ kring punkterna $y_1 = 20 + 4\sqrt{25 - 10c}$ och $y_2 = 20 - 4\sqrt{25 - 10c}$. Vi kan skriva

$$g(y) = -\frac{1}{160}(y - y_1)(y - y_2).$$

Efterom $y_1 > y_2$ har vi att $g(y) < 0$ för $y > y_1$, $g(y) > 0$ för $y_2 < y < y_1$ och $g(y) < 0$ för $y < y_2$. Således är den kritiska punkten y_1 stabil, och y_2 instabil (rita fasporträtt). Den söka stabila jämviktsnivån är alltså

$$y_0(c) = 20 + 4\sqrt{25 - 10c}.$$