KTH Matematik
Examinator Kristian Bjerklöv

Tentamen i Diff & trans III (SF1637) den 12 januari 2010 kl 14:00 - 19:00

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna 1 – 10 ger vardera maximalt 3 poäng. Fullständiga lösningar krävs.

För betyg E: minst 14 poäng
För betyg D: minst 17 poäng
För betyg C: minst 20 poäng, varav minst 3 poäng på B-delen
För betyg B: minst 22 poäng, varav minst 6 poäng på B-delen
För betyg A: minst 25 poäng, varav minst 8 poäng på B-delen

Om 13 poäng uppnås finns möjlighet att komplettera (till betyget E). Kontakta i så fall kursledaren. Kompletteringen kommer att ske måndagen den 1 februari.

Den som är godkänd på lappskrivning nummer i har automatiskt full poäng på uppgift nummer i.

Del A

1. Lös den Bernoulliska differentialekvationen

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2.$$

2. Differentialekvationen

$$xy''(x) - (2x+1)y'(x) + (x+1)y(x) = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = e^x$ (behöver ej verifieras). Bestäm den allmänna lösningen.

3. Bestäm de kritiska punkterna till systemet

$$\frac{dx}{dt} = y - 1$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y$$

samt avgör om de är stabila eller instabila.

4. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1 \\ 0, & \text{om } |t| \geq 1. \end{cases}$$

a) Beräkna Fouriertransformen $\widehat{f}(\omega)$ till $f(t)$.
b) Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

5. Avgör om en lösning $(x(t), y(t))$ till det autonoma systemet

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

som går genom punkten $(1, 0)$ är periodisk.

6. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 1, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Del B

7. Låt $y_1(x) = 5x^2$, $y_2(x) = 3x + 4x^3$, $y_3(x) = x^2 + 7x^3$, $y_4(x) = 2x + x^2$ och $y_5(x) = 2x + 3x^2 + 5x^3$ vara lösningar till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation. Bestäm den entydiga lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 2, y'(1) = 3$ och $y''(1) = 4$.

8. Funktionerna $\phi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ är kontinuerliga på intervallet $[a, b]$ och uppfyller

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{om } m = n \\ 0, & \text{om } m \neq n. \end{cases}$$

En viss funktion $f(x)$ kan skrivas $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)$ där c_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ är konstanter. Visa att konstanterna c_n ges av

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx.$$

9. Vi betraktar differentialekvationen

$$x''(t) + 4x'(t) - (x'(t))^3 + 4x(t) = 0.$$

Om $x(0)$ och $x'(0)$ är väldigt nära 0, måste $x(t) \to 0$ då $t \to \infty$?

10. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt

$$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right), y > 0, \quad \text{där } a = 4 \text{ och } b = 40.$$

Nu börjar man fiska ut c ton fisk per år, där c är en positiv konstant.

a) Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b) Ange det kritiska värdet på c som inte får överskridas om det ska finnas någon jämviktslösning > 0.

c) Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.