Tentamensskrivning i Differentialekvationer och transformer III, SF1637(5B1212).

Onsdagen den 20 oktober 2010, kl 0800-1300.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1212 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.

Uppgifterna 11, 12 och 15 ger 4 poäng vardera.
Uppgift 13 ger 3 poäng. Uppgift 14 ger 5 poäng.

Examinator: Hans Tranberg.

Del 1

Modul 1.

I en tank finns ett stort antal molekyler. Om två av dessa krockar bildar dessa en ny molekyl och därför minskar antalet molekyler hela tiden med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på antalet molekyler. Vi gör två mätningar med 10 sekunders mellanrum och märker att vid den andra mätningen finns hälften så många molekyler som vid den första mätningen. Efter hur lång tid finns det en fjärdedel av det ursprungliga antalet molekyler kvar som fanns vid den första mätningen ?

Modul 2.

En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \mathbf{X}$. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$?

Modul 3.

För funktionen f gäller : $f(t+2\quad) = f(t)$ och $f(t) = t^2, \quad < t < \quad$.

Ange dess fourierserie och bestäm utgående från den summorna $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ och $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(\ \ 1)^n}{n^2}$.

vgv

Del 2

11. . Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x),\quad f(x) = \begin{cases} x\ , & 0 \le x < 1 \\ 0\ , & x \ge 1 \end{cases},\quad y(0) = 2.$$

12. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{cases} x' = -3x + y^2 + 2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$.

13. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2 y'' + axy' + by = 0$ ges av $y_1 = x$ och $y_2 = x^2$. Vidare finns det en motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p = x\ln x$. Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

14. a. Bestäm Fouriertransformen av funktionen $f(t) = e^t U(-t)$, där $U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$. (2p)

b. Skriv $f(t)$ som en Fourierintegral och ange Fourierintegralens värde i varje punkt. (3p)

15. Bestäm alla lösningar på formen $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ till differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

i de fall där "r-ekvationen" har lösningar på formen Cr^p, p är en reell konstant.