Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer och transformer III, SF1637.
Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg

Del 1

Modul 1.

Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$, $y(0) = 4$.
Undersök $y(x)$ då x växer från startvärdet $x_0 = 0$.

Lösning:
Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningarna saknar i detta fall intresse.
De stationära lösningarna är $y = \pm 3$.

Med $y^2 - 9 \neq 0$, $y \neq 3$ omformas differentialekvationen till $\frac{1}{y^2-9}\frac{dy}{dx} = 1$,

vilken kan skrivas $\frac{1}{(y+3)(y-3)}\frac{dy}{dx} = 1$.

Partialbråksuppdelning ger $\left(\frac{-1}{y+3} + \frac{1}{y-3}\right)\frac{dy}{dx} = 6$.

Integration med avseende på x ger: $-\ln|y+3| + \ln|y-3| = 6x + \ln|C_1|$.

Vi bestämmer y: $\ln\left|\frac{y-3}{y+3}\right| = 6x + \ln|C_1|$, $\frac{y-3}{y+3} = \pm C_1 e^{6x}$, $C = \pm C_1$ ger $\frac{y-3}{y+3} = Ce^{6x}$.

$y - 3 = (y+3)Ce^{6x}$, $y - yCe^{6x} = 3Ce^{6x} + 3$, $y = \frac{3Ce^{6x}+3}{1-Ce^{6x}}$.

Villkoret $y(0) = 4$ ger $C = \frac{1}{7}$, vilket insatt i den allmänna lösningen ger

den sökta lösningen $y = \frac{3(e^{6x}+7)}{7-e^{6x}}$, $x \neq \frac{\ln 7}{6}$. Existensintervallet ges av $\left\{x : x < \frac{\ln 7}{6}\right\}$

För startvärdet $x_0 = 0$ är $y = 4$ och derivatan är positiv.

Detta innebär att funktionen växer och y blir obegränsad för $x = \frac{\ln 7}{6}$.

SVAR: $y = \frac{3(e^{6x}+7)}{7-e^{6x}}$, $x < \frac{\ln 7}{6}$. y växer obegränsat.

Modul 2.

Positionen för en partikel ges av systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vidare gäller för 2x2-matrisen $\mathbf{A}$ följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t = 2$ befinner sig i punkten $(2,2)$.
<u>Lösning</u>:
För att bestämma den allmänna lösningen behövs två linjärt oberoende lösningar till systemet.
Lösningarna erhålles med hjälp av matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.
Egenvärdena fås vanligtvis ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, men i detta fall har vi ytterligare information rörande matrisen $\mathbf{A}$. Vi kan direkt ange egenvärden och tillhörande egenvektorer.
Vi omformar de givna ekvationerna.

$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ kan skrivas $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $\lambda_1 = 3$ och en tillhörande egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En lösning ges av $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$.

$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kan skrivas $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $\lambda_2 = -1$ och en tillhörande egenvektor är $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. En lösning ges av $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

Den allmänna lösningen kan då skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$.

Vi erhåller $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Egenvärdena är reella med skilda tecken.
Det innebär att origo som är den enda stationära punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Partikeln placerad i punkten $(2,2)$, vilken ej ligger på ”den stabila egenvektorn”,
Kommer att avlägsna sig obegränsat.

SVAR: Den allmänna lösningen $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat.

<u>Modul 3.</u>

Beräkna fouriertransformen av funktionen $f(t) = \begin{cases} e^{|t|} & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$.

Observera att transformen skall ges på reell form.
<u>Lösning:</u>

Enligt definitionen på fouriertransform gäller att $F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$.

Insättning av aktuell funktion ger $F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-1}^{0} e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} e^{t}e^{-i\omega t}\,dt$.

Förenkling ger $F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-1}^{0} e^{-(1+i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{1} e^{(1-i\omega)t}\,dt$.

Integration ger $F\{f(t)\}(\omega) = \dfrac{1-e^{1+i\omega}}{-(1+i\omega)} + \dfrac{e^{1-i\omega}-1}{1-i\omega}$.
Detta uttryck skall ges på reell form.
Sätt på gemensamt bråksstreck.

$$F\{f(t)\}(\omega) = \frac{(1-i\omega)(e^{1+i\omega}-1)+(1+i\omega)(e^{1-i\omega}-1)}{(1+i\omega)(1-i\omega)} = \frac{e(e^{i\omega}+e^{-i\omega})-i\omega e(e^{i\omega}-e^{-i\omega})-2}{1+\omega^2}$$

vilket förenklat blir $F\{f(t)\}(\omega) = \dfrac{e2\cos\omega - i\omega e2i\sin\omega - 2}{1+\omega^2} = \dfrac{2(e\cos\omega + \omega e\sin\omega - 1)}{1+\omega^2}$.

SVAR: Den sökta fouriertransformen är $F\{f(t)\}(\omega) = \dfrac{2(e\cos\omega + \omega e\sin\omega - 1)}{1+\omega^2}$.

Del 2

11. Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera periodiskt med tiden t, mätt i månader, enligt följande:
y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den periodiska faktorn $\cos\frac{\pi t}{6}$.
På morgonen den 17 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton och den 17 augusti är $y = 3$ ton.
Bestäm $y(t)$ som funktion av t .
Bestäm även när fiskebeståndet är minst och ange dess minsta värde.

Lösning:

Beståndet, $y(t)$, uppfyller differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$, där k är en proportionalitetskonstant.
Den erhållna differentialekvationen är separabel. Konstantlösningen saknar i detta fall intresse.
Omformning ger: $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt} = k\cos\frac{\pi t}{6}$. Integration med avseende på t ger: $\ln|y| = k\dfrac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6} + A$.

Lös ut y : $y = \pm e^{A} e^{k\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}} = Ce^{k_0\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Vi bestämmer nu konstanterna med hjälp av villkoren $\begin{cases} 1 = y(0) = C \\ 3 = y(3) = Ce^{k_0\sin\frac{\pi 3}{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} C = 1 \\ e^{k_0} = 3\ ,\ k_0 = \ln 3 \end{cases}$.

Beståndet ges av $y(t) = e^{\ln 3\sin\frac{\pi t}{6}} = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Det minsta värdet, $y = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$, erhålles då $\sin\frac{\pi t}{6} = -1$, $t = 9 + 12n$, $n \in N$.

SVAR: Beståndet uppfyller differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = ky\cos\frac{\pi t}{6}$ och är $y(t) = 3^{\sin\frac{\pi t}{6}}$.

Beståndet är minst den 17 februari varje år och är lika med $1/3$ ton.

12. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?
b. Undersök om följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,..,\ \sin nx,.....\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.
c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?
d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

Lösning:

a. Två funktioner, f och g , är ortogonala på intervallet $[0, L]$ då $\int_0^L f(x)g(x)dx = 0$.

b. Vi undersöker om $\int_0^{\pi} \sin nx \ \sin mx dx = 0$ med $n \neq m$.

$$V.L. = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)\,dx$$

$$V.L. = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)}\sin(n-m)x - \frac{1}{(n+m)}\sin(n+m)x\right]_0^{\pi} = 0 = H.L.$$

c. Den reellvärda funktionen f är periodisk med perioden T då $f(x+T) = f(x)$ för alla x .

d. Koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ är fourierkoefficienterna för den udda funktion, som på intervallet $0 < x < \pi$ ges av $f(x) = \cos 2x$.

Koefficienterna ges av $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \ \sin nx \ dx$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(nx+2x) + \sin(nx-2x)\}dx = \{n \neq 2\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1-\cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1-\cos(n-2)\pi}{n-2}\right]\right\} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right]\right\} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\frac{2n}{n^2-4}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 \ , \ \text{om } n \text{ är jämnt} \neq 2. \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)} \ , \ \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Vidare gäller $b_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(4x)\}dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\pi} = 0$

Anmärkning: En annan lösningsvariant på uppgift d är att först multiplicera $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ med $\sin mx$ och därefter integrera över intervallet $0 < x < \pi$ och utnyttja ortogonaliteten hos följden $\{\sin x, \ \sin 2x, \ \sin 3x,.., \ \sin nx,..... \}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Funktionsföljden är ortogonal. c. Se ovan.
d. Koefficienterna

$$b_n = \begin{cases} 0 \ , \ \text{om } n \text{ är jämnt.} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-4)} \ , \ \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

13. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a,b).
Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a,b).
Vidare är y_1 och y_2 lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a,b).

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$.
$W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2.
Lösning:

y_1 och y_2 uppfyller differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, vilket innebär att vi får följande system: $\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$.

Wronskianen av y_1 och y_2 ges av $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$.

Vi omformar systemet så att Wronskianen uppkommer i detta system.
Multiplicera den första ekvationen med y_2 och den andra ekvationen med y_1 samt bilda differensen av mellan de nya ekvationerna.

$$\begin{cases} (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 = 0 \\ (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)y_1 = 0 \end{cases} \quad -y_1''y_2 + y_2''y_1 + p(x)(-y_1'y_2 + y_2'y_1) = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{y_2'y_1 - y_1'y_2\right\} + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \ , \ \frac{d}{dx}W(x) + p(x)W(x) = 0.$$

Vi har erhållit en differentialekvation i Wronskianen $W(x)$.

Differentialekvationen är separabel $\frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx} = -p(x)$.

Integrera från x_0 till x: $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx}dx = \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$, $\ln|W(x)| - \ln|W(x_0)| = \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$

$W(x) = \pm W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} -p(x)dx}$

För x lika med x_0 är $W(x)$ lika med $W(x_0)$ vilket ger $W(x_0) = \pm W(x_0)$.

Vi har fått $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$. VSV.

SVAR: Se ovan.

14. Bevisa följande påstående:
Om $f(t)$ har Fouriertransformen $F\{f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ och $a \neq 0$ är sådan att Fouriertransformen av $f(at)$ (betecknad som $F\{f(at)\}$) existerar så är $F\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

<u>Lösning:</u>

Enligt definitionen på fouriertransform gäller att $F\{f(at)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt$.

Vi delar upp i två fall. Ett då $a > 0$ och ett då $a < 0$.
Först behandlar vi fallet $a > 0$.
Variabelbytet $s = at$ och $ds = adt$ ger gränserna $t = \infty \ : \ s = \infty$ respektive $t = -\infty \ : \ s = -\infty$.

Vi får $F\{f(at)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega\frac{s}{a}}\frac{ds}{a} = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

Nu över till fallet $a < 0$.
Variabelbytet $s = at$ och $ds = adt$ ger gränserna $t = \infty \ : \ s = -\infty$ respektive $t = -\infty \ : \ s = \infty$.

Vi får $F\{f(at)\}(\omega) = \int_{\infty}^{-\infty} f(s)e^{-i\omega\frac{s}{a}}\frac{ds}{a} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega\frac{s}{a}}\frac{ds}{a} = -\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

Vi sammanfattar: $F\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$. vsv.

SVAR: Se ovan.

15. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} \dot{x} = y(x^2+1) \\ \dot{y} = -x(x^2+1) \end{cases}$.

Klassificera om möjligt de stationära punkternas karaktär med avseende på stabilitet/instabilitet och typ(nod, spiral, centrum).
Bestäm även lösningskurvorna och speciellt den lösning som går genom punkten $(x,y) = (3,4)$.
Lösning:
Vi börjar med att bestämma de stationära lösningarna.
De erhålles då hastighetsvektorn är lika med nollvektorn.

Vi får följande system: $\begin{cases} 0 = y(x^2+1) \\ 0 = -x(x^2+1) \end{cases}$.

Den enda stationära lösningen är origo, dvs $(x,y) = (0,0)$
För att undersöka dess karaktär linjariserar vi det icke-linjära systemet med hjälp av Jacobimatrisen.

Jacobimatrisen blir $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y2x & x^2+1 \\ -3x^2-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jacobimatrisen i $(x,y) = (0,0)$ ger en konstant matris vars egenvärden vi bestämmer.

$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Egenvärden fås ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{J}(0,0) - \lambda \mathbf{I})$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ detta ger de imaginära lösningarna $\lambda = \pm i$.

I det linjariserade systemet är $(x,y) = (0,0)$ ett centrum.
Dock ger det ingen information rörande det icke linjära systemet.
Vi övergår till att använda fasplanemetoden.

Det ursprungliga systemet omformas enligt följande: $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{-x(x^2+1)}{y(x^2+1)} = \dfrac{-x}{y}$.

Vi har erhållit en första ordningens differentialekvation.
Omformning ger $2yy' + 2x = 0$. Integrera med avseende på x: $x^2 + y^2 = C$.
Lösningen genom punkten $(x,y) = (3,4)$ är $x^2 + y^2 = 25$.
Således är den stationära lösningen ett centrum.
SVAR: Den stationära lösningen är $(x,y) = (0,0)$. Den sökta lösningskurvan är $x^2 + y^2 = 25$.
Den stationära lösningen $(x,y) = (0,0)$ är ett centrum.