Tentamensskrivning i Differentialekvationer och transformer III, SF1637.
Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg

Del 1

Modul 1.

Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$, $y(0) = 4$.
Undersök $y(x)$ då x växer från startvärdet $x_0 = 0$.

Modul 2.

Positionen för en partikel ges av systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Vidare gäller för 2x2-matrisen $\mathbf{A}$ följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t = 2$ befinner sig i punkten $(2,2)$.

Modul 3.

Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(t) = \begin{cases} e^{|t|} & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$.
Observera att transformen skall ges på reell form.

vgv

Del 2

11. Beståndet, $y(t)$, mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera periodiskt med tiden t, mätt i månader, enligt följande:
y :s ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell mot produkten av y och den periodiska faktorn $\cos\frac{\pi t}{6}$.
På morgonen den 17 maj (väljes som $t = 0$) är $y = 1$ ton och den 17 augusti är $y = 3$ ton.
Bestäm $y(t)$ som funktion av t .
Bestäm även när fiskebeståndet är minst och ange dess minsta värde.

12. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?
b. Undersök om följden $\{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,..,\ \sin nx,.....\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.
c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?
d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ så att $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

13. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a,b).
Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a,b).
Vidare är y_1 och y_2 lösningar till differentialekvationen
$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a,b).
Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$.
$W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2.

14. Bevisa följande påstående:
Om $f(t)$ har Fouriertransformen $F\{f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega)$ och $a \neq 0$ är sådan att Fouriertransformen av $f(at)$ (betecknad som $F\{f(at)\}$) existerar så är $F\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

15. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} \dot{x} = y(x^2+1) \\ \dot{y} = -x(x^2+1) \end{cases}$.
Klassificera om möjligt de stationära punkternas karaktär med avseende på stabilitet/instabilitet och typ(nod, spiral, centrum).
Bestäm även lösningskurvorna och speciellt den lösning som går genom punkten $(x,y) = (3,4)$.