

KTH Matematik

Tentamensskrivning i Differentialekvationer och transformier III, SF1637.

Måndagen den 17 oktober 2011, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.

För betyg E krävs 3 godkända moduler.

Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.

För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.

För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.

För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

Del 1

Modul 1.

En termometer tas inifrån ett rum och ut, där temperaturen är 5°C .

Efter 1 minut avläses 15°C och efter 2 minuter avläses 10°C . Vad är rummets temperatur?

Ledning: Antag att Newtons avsvlningslag gäller, dvs att avsvlningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.

Modul 2.

Låt $y_1(x) = 3x$, $y_2(x) = x + 2x^2$, $y_3(x) = 2x + 5x^2$ och $y_4(x) = 7x + x^2$ vara lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning två.

Vidare är $y_p = x \ln x$, $x > 0$ lösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.

Bestäm den lösning till den inhomogena differentialekvationen som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 3$.

Modul 3.

Undersök om $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2, 2)$.

Den inre produkten ges av $\int_{-2}^2 f_1(x)f_2(x)dx$. Bestäm därefter konstanterna c_1 och c_2 så att

$f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ blir ortogonal mot både f_1 och f_2 på samma intervall.

Del 2

11. a) En lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = y^4$, $y(0) = 0$ ges av $y \equiv 0$.

Är lösningen entydig?

b) $y = x^3$ är en lösning till $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$.

Är lösningen entydig?

c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y' = 3x^2(y^2 + 1)$, $y(1) = 1$ existerar.

Är lösningen entydig?

12. Klassificera med avseende på stabilitet och typ de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' - (x^2 - 1)x' + x = 0$.

13. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.

b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.

c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

14. Funktionen $f(x)$ har fouriertransformen $F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \begin{cases} i\omega & , -1 < \omega < 1 \\ 0 & , \text{för övrigt} \end{cases}$.

a) Bestäm $f(x)$.

b) Bestäm fouriertransformen av $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

15. a) Vad menas med att två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall $\{t : 0 \leq t \leq L\}$ med den inre produkten $\int_0^L f(t)g(t)dt$?

b) Visa att $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ är ortogonal på intervallet $\{t : 0 \leq t \leq \pi\}$ med den inre produkten $\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$.

c) Tilldela funktionen f fourierserien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ och g fourierserien $\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt$.

Uttryck integralen $\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$ i fourierkoefficienterna.