Tentamensskrivning i SF1637, Differentialekvationer och transformer III.

Tisdagen den 8 januari 2013, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

För betyg A krävs minst 25 poäng varav minst 8 poäng på del B.
För betyg B krävs minst 22 poäng varav minst 6 poäng på del B
För betyg C krävs minst 20 poäng varav minst 3 poäng på del B
För betyg D krävs minst 17 poäng.
För betyg E krävs minst 14 poäng.
För betyg FX krävs 13 poäng.
Uppgifterna 1-10 ger 3 poäng vardera.

Del A

1. Befolkningen i ett litet samhälle växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningen.
Den ursprungliga befolkningen är 500 personer.
Efter 5 år är befolkningen 1000 personer.
Ställ upp tillhörande begynnelsevärdesproblem.
Hur stor är befolkningen efter 15 år ?

2. Antag att en partikels rörelse styrs av systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vad händer med en partikel placerad i punkten $(2,3)$ efter lång tid.
Bestäm vidare den allmänna lösningen till systemet.

3. Låt $f(t)$ vara signalen $f(t) = \theta(t+1) - \theta(t-1) + \delta(t-2), \; -\infty < t < \infty$,
där $\theta(t)$ är Heavisides stegfunktion och $\delta(t)$ är en Dirac-puls.
a) Beskriv signalen med lämplig figur eller i ord.
b) Beräkna Fouriertransformen av f.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 y' + 3xy = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$
som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$.

5. Antag att $(x+1)y'' + xy' - y = 0$,$x > 0$. En lösning till denna ekvation är $y(x) = e^{-x}$.
Bestäm allmänna lösningen.

6. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{cases} x' = -3x + y^2 + 2 \\ y' = x - y^2 \end{cases}$.

Del B

7. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a , och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c. Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.

vgv

8. $y_1(x) = 2x,\ \ y_2(x) = x - 3x^2,\ \ y_3(x) = 3x - 4x^2$ och $y_4(x) = 6x - 7x^2$ är ett antal lösningar till en homogen differentialekvationen på formen $x^2y'' + axy' + by = 0,\ \ x > 0$. Vidare är $y_p = x\ln x$ en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = f(x),\ \ x > 0.$
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.
Ange även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$.

9. Bestäm om möjligt produktlösningar $u(x,y) = X(x)Y(y)$ till den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Låt $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,L]$.
De kontinuerliga funktionerna f och g kan utvecklas i denna följd på intervallet $[0,L]$.
f har utvecklingen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Phi_n(x)$ och g har utvecklingen $\sum_{m=1}^{\infty} b_m\Phi_m(x)$,
Bestäm koefficienterna a_n och b_m.
Härled ett uttryck för integralen $\int_0^L f(x)g(x)dx$ med hjälp av koefficienterna a_n och b_m.