Tentamensskrivning i SF1637, Differentialekvationer och transformer III.

Tisdagen den 20 augusti 2013, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

För betyg A krävs minst 25 poäng varav minst 8 poäng på del B.
För betyg B krävs minst 22 poäng varav minst 6 poäng på del B
För betyg C krävs minst 20 poäng varav minst 3 poäng på del B
För betyg D krävs minst 17 poäng.
För betyg E krävs minst 14 poäng.
För betyg FX krävs 13 poäng.
Uppgifterna 1-10 ger 3 poäng vardera.

Del A

1. En termometer tas inifrån ett rum och ut där temperaturen är 5 °C.
Efter 1 minut avläses 15 °C och efter 2 minuter avläses 10 °C. Vad är rummets temperatur ?
Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan termometern och omgivningen.

2. Antag att $(x+1)y''+xy'-y=0 \quad ,x>0$. En lösning till denna ekvation är $y(x)=e^{-x}$.
Bestäm allmänna lösningen.

3. För den jämna funktionen f med perioden 2π gäller att $f(x)=\sin x, \quad \text{då} \quad 0<x<\pi$.
Bestäm fourierseriens summa för $x=\dfrac{3\pi}{2}$. Ange även f:s fourierserie.

4. Låt $f(t)$ vara signalen $f(t)=\theta(t+1)-\theta(t-1)+\delta(t-2), \ -\infty<t<\infty$,
där $\theta(t)$ är Heavisides stegfunktion och $\delta(t)$ är en Dirac-puls.
a) Beskriv signalen med lämplig figur eller i ord.
b) Beräkna Fouriertransformen av f.

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{cases} x'=2x^2-y^2-8 \\ y'=x-y \end{cases}$.

6. Låt $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$. Ange i förekommande fall alla reella värden på α för vilka den kritiska punkten (0,0) till systemet av linjära differentialekvationer $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{AX}$ är a) stabil spiralpunkt och b) center.

vgv

Del B

7. Betrakta randvärdesproblemet $y'' + \lambda y = 0 \quad , y(0) = 0, \; y(\pi/2) = 0$. Undersök om det är möjligt att bestämma värden på λ så att problemet får a) triviala lösningar b) icke-triviala lösningar.

8. Bestäm en kontinuerlig funktion som är styckvis deriverbar och uppfyller begynnelsevärdesproblemet $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$ där $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$ och $y(0) = 2$.

9. Låt Φ vara en fundamentalmatris till systemet av linjära differentialekvationer $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$.

Härled en partikulärlösning till systemet $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, där $\mathbf{F}$ är en vektorvärd funktion.

Bestäm allmänna lösningen till systemet $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$.

10. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le x \le L$?

b. Undersök om följden $\{\sin x, \; \sin 2x, \; \sin 3x, \ldots\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le x \le \pi$.

c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,\ldots$ så att $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.