

Tentamensskrivning i SF1637, Differentialekvationer och transformer III.

Tisdagen den 7 januari 2014, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

För betyg A krävs minst 25 poäng varav minst 8 poäng på del B.

För betyg B krävs minst 22 poäng varav minst 6 poäng på del B

För betyg C krävs minst 20 poäng varav minst 3 poäng på del B

För betyg D krävs minst 17 poäng.

För betyg E krävs minst 14 poäng.

För betyg FX krävs 13 poäng.

Uppgifterna 1-10 ger 3 poäng vardera.

Del A

1. Befolkningen i en liten stad växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningsmängden.

Den ursprungliga befolkningen på 500 personer har på 10 år växt med 10%.

Ställ upp en differentialekvation för befolkningsmängden och tillhörande villkor.

Det påstås att antalet personer i den lilla staden understiger 600 personer efter 20 år.

Undersök om påståendet är sant eller falskt.

2. Låt $y = t^2$ vara en lösning till differentialekvationen $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$, $t > 0$.

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2 y'' - 3ty' + 4y = 4t^2$, $t > 0$.

3. Den 2-periodiska funktionen f kan utvecklas i en cosinusserie och en sinusserie på intervallet $-1 < x < 1$.

Ange vad respektive serie konvergerar mot för $x = 0$ då $f(x) = x^2 + 5$, $0 < x < 1$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $xy'' + 4y = x^4 y^2$, $x > 0$, $y(1) = 1$.

Ange även lösningens existensintervall.

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet:
$$\begin{cases} x' = 2x^2 - y^2 - 4 \\ y' = x + y \end{cases}$$

6. Bestäm utgående från definitionen fouriertransformen av $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$.

Undersök om $\hat{f}(\omega)$ är kontinuerlig.

Del B

7. I en populationsmodell är den **relativa** tillväxthastigheten, som funktion av tusentalet djur, $P(t)$, ett förstgradspolynom, nämligen en konstant minus antalet djur gånger en annan konstant. Konstanterna är positiva. Modifiera nu denna modell genom att ta hänsyn till att ett konstant antal djur, h , försäljes per tidsenhet. Dessutom kommer ett konstant antal djur, k , att införskaffas per tidsenhet. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående. Låt därefter konstanterna vara 5, 1, 7 respektive 3. Studera långtidsbeteendet för alla startvärden, $P(0) = P_0$, på populationen. Kommer populationen att dö ut för några startvärden? Bestäm i så fall tidpunkten för detta.

8. Vad menas med en fundamentalmängd av lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2 y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$?

Låt $y_1(x) = x^2 + x^3$, $y_2(x) = 3x^2 + 2x^3$, $y_3(x) = 7x^2$ och $y_4(x) = 5x^2 - 6x^3$ vara

lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2 y'' + axy' + by = 0$, $x > 0$.

Ange dess fundamentalmängd. Vidare är $y_p(x) = x \ln x$ en partikulärlösning till den

inhomogena differentialekvationen $x^2 y'' + axy' + by = f(x)$, $x > 0$.

Bestäm den inhomogen differentialekvationen.

Ange dess allmänna lösning.

9. För det linjära systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{A}$ är en 2×2 -matris gäller att $\mathbf{A}$'s egenvärden är sammanfallande och endast en linjärt oberoende egenvektor erhålles.

Bestäm formen på de två linjärt oberoende lösningarna samt ange hur de kan bestämmas.

Låt vidare $\mathbf{F}$ vara en fundamentalmatris till det homogena systemet.

Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$.

Tillämpa ovanstående för att bestämma den allmänna lösningen

till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. Bestäm den 2π -periodiska lösningen till $y'(t) + 2y(t - \pi) = \sin t$, $-\infty < t < \infty$.

Ledning: Ansätt lösningen till att vara en fourierserie.