Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2005-10-25, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

---

1. a) Vi skriver $2i = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$, n godtyclkigt heltal, och får
$$\sqrt{2i} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi n)} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\,e^{i\pi n} = \pm(1+i).$$
(Jämna n ger plus, udda ger minus; $\sqrt{2}$ avser den positiva roten ur två.)

b)
$$\log i = \ln|i| + i\arg i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n),$$
n godtyclkigt heltal.

c) $\sin i = \frac{1}{2i}(e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}) = \frac{i}{2}(e - \frac{1}{e})$.

d) Med hjälp av b) fås
$$i^i = e^{i\log i} = e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)},$$
n godtyckligt heltal.

2. a) Eftersom $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ så har vi att lösa
$$w = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$
Efter multiplikation med e^{iz} (som aldrig $= 0$) får vi en andragradsekvation i e^{iz}:
$$2we^{iz} = (e^{iz})^2 + 1.$$
Denna löses på vanligt sätt till
$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}$$
(båda rötterna). Enligt definitionen av logaritmen (med alla dess grenar) är detta ekvivalent med
$$z = -i\log(w + \sqrt{w^2-1}).$$

b) Enligt a) gäller
$$\arccos w = -i\log(w + \sqrt{w^2 - 1}.$$
Alltså fås
$$\arccos\frac{1}{2} = -i\log(\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 1}) = -i\log(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2})$$
$$= -i(\ln|\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}| + i\arg(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2})) = -i(\ln 1 + i(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n)) = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$
$$\arccos 2 = -i\log(2 + \sqrt{4-1}) = -i\log(2 \pm \sqrt{3})$$
$$= -i(\ln(2\pm\sqrt{3}) + i\cdot 2\pi n) = 2\pi n \pm i\ln(2+\sqrt{3})$$
(n godtyckligt heltal i båda fallen). Vi har använt att $2 \pm \sqrt{3} > 0$ och att $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$.

3. a) En direkt uträkning ger

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cdots = 6y + 2 + (-6y - 2) = 0.$$

b) Med $f(z) = u + iv$ ska paret u (känd), v (okänd) uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Alltså ska v lösa

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -(3x^2 - 3y^2 - 2y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 2x. \end{cases}$$

Första ekvationen ger att

$$v = -x^3 + 3xy^2 + 2xy + g(y)$$

för någon funktion $g(y)$. Derivering av detta ger

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 2x + g'(y).$$

Jämförelse med den givna ekvationen för $\frac{\partial v}{\partial y}$ ger att $g'(y) = 0$, dvs att $g(y) =$ konstant. Eftersom bara en funktion f sökes kan vi välja $g = 0$. Vi har då

$$f(z) = u + iv = 3x^2y - y^3 + x^2 - y^2 + i(-x^3 + 3xy^2 + 2xy)$$

$$= -ix^3 + 3x^2y + 3ixy^2 - y^3 + x^2 + 2ixy - y^2 = -i(x+iy)^3 + (x+iy)^2$$

$$= -iz^3 + z^2.$$

4. a) Här behöver man halvera alla vinklar i origo (som ju ej tillhör D), vilket man gör med

$$w = \sqrt{z},$$

där principalgrenen av $\sqrt{z}$ (definierad i $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, speciellt i D) avses.

b) Här ska vinklarna fördubblas:

$$w = z^2.$$

c) Man använder en Möbiustransformation som (exempelvis) tar punkten $z = -1$ på $w = 0$, $z = +1$ på $w = \infty$ och tar intervallet $(-1, +1)$ på positiva realaxeln. (Då kommer cirkelbågen att avbildas på positiva imaginäraxeln på grund av konformiteten i origo.) De två första kraven ger $w = c\frac{z+1}{z-1}$ för någon konstant $c \in \mathbb{C}$. Det sista kravet uppfylls med $c < 0$, tex $c = -1$. Alltså kan vi ta

$$w = -\frac{z+1}{z-1}.$$

d) Med hjälp av c) och receptet i b) fås

$$w = (\frac{z+1}{z-1})^2.$$

e) Vi sammansätter resultatet i d) med en avbildning som tar övre halvplanet på enhetsskivan. En sådan är (om man tar $i \mapsto 0$, $-i \mapsto \infty$, $0 \mapsto -1$):

$$w \mapsto \frac{w-i}{w+i}.$$

Den totala avbildningen (från D till D_e) blir

$$w = \frac{(\frac{z+1}{z-1})^2 - i}{(\frac{z+1}{z-1})^2 + i} = \frac{(z+1)^2 - i(z-1)^2}{(z+1)^2 + i(z-1)^2}$$

(vilket kan skrivas om på olika sätt).

5. a) Här går det bra att bara substituera $z+4$ med $\frac{1}{w}$ i ekvationen för cirkeln. Detta ger

$$|w| = \frac{1}{2},$$

dvs bilden är cirkeln med medelpunkt i origo och radie $= 1/2$.

b) Vi tittar på några intressanta punkter med avseende på den givna cirkeln, t.ex. $z = -4$, $z = \infty$ (spegelpunktspar), $z = -2$ (ligger på cirkeln). Dessa avbildas på $w = -\frac{1}{2}$, $w = 0$, resp. $w = \infty$. Det följer att bild-"cirkeln" är en rät linje som har $w = -\frac{1}{2}$, $w = 0$ som spegelpunkter, dvs den är

$$\operatorname{Re} w = -\frac{1}{4}.$$

c) Ytterligare intressanta punkter är spegelpunktsparet $z = -3$ och $z = 0$. Dessa avbildas (av $w = \frac{1}{z}$) på $w = -\frac{1}{3}$ resp. $w = \infty$. Punkten $z = -2$ avbildas nu på $w = -\frac{1}{2}$. Alltså är bild-"cirkeln" i c) en riktig cirkel som har medelpunkt $w = -\frac{1}{3}$ och som går genom punkten $w = -\frac{1}{2}$. Det följer att den har ekvationen

$$|w + \frac{1}{3}| = \frac{1}{6}.$$

6. Vi avbildar cirkelskivan konformt på övre halvplanet, där problemet kan lösas med hjälp av enkla geometriska överläggningar. Vi ordnar så att brytpunkterna $z = 1$ och $z = i$ avbildas på $w = 0$ resp. $w = 1$. Med lite pusslande kommer man fram till exempelvis

$$w = -i\frac{z-1}{z+1}.$$

.

I $w = u + iv$-planet har vi då att hitta en funktion $W = W(u,v)$ som är harmonisk i övre halvplanet:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0 \quad \text{då} \quad v > 0,$$

och har randvärdena

$$W = \begin{cases} 7 & \text{då} \quad v = 0,\ 0 < u < 1, \\ 5 & \text{på resten av} \quad v = 0. \end{cases}$$

Grundidén är att använda funktionen $\arg(w-a)$ ($a \in \mathbb{R}$), som är harmonisk i övre halvplanet och på realaxeln har randvärdena 0 (till höger om punkten a) och π (till vänster om a). Dessutom behövs konstantfunktionen (som ju också är harmonisk). Vi ansätter

$$W = A + B \arg(w-1) + C \arg w$$

där A, B, C är reella konstanter. W är automatiskt harmonisk i övre halvplanet (principalgrenen av arg avses), och randvärdena stämmer om $A = 5$, $A + \pi B = 7$, $A + \pi B + \pi C = 5$. Detta ger

$$W = 5 + \frac{2}{\pi} \arg(w-1) - \frac{2}{\pi} \arg w = 5 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{u-1}{v} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{u}{v}.$$

Substituerar vi här tillbaka till $z = x + iy$ får vi, efter lite räkningar, lösningen till det givna problemet:

$$V(x,y) = W(u,v) = 5 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{-x^2 - y^2 - 2x + 2y - 1}{1 - x^2 - y^2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}.$$

Med viss reservation för felräkningar,
Björn Gustafsson